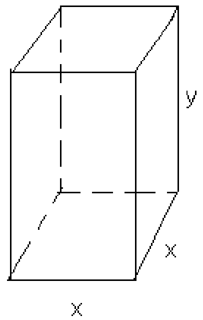
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad de 13'5 m^3. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para el gasto de chapa sea el mínimo posible.

Solución



Función a Optimizar: Superficie $S = x^2 + 4xy$ (No tiene tapa superior)
Relación entre las variables: Capacidad = Volumen = $13'5 = x^2.y$, de donde $y = (13'5)/x^2$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$
Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x(13'5)/x^2 = x^2 + 54/x$
$S'(x) = 2x - 54/x^2$
De $S'(x) = 0$, tenemos $2x - 54/x^2 = 0$, es decir $2x = 54/x^2$, de donde $x^3 = 27$, y calculando la raíz cúbica sale **$x = 3$ m**, posible máximo ó mínimo.
$S''(x) = 2 + 108/x^3$
Como $S''(3) = 2 + 108/(3)^3 = 2 + 4 = 6 > 0$, $x =$ **3 es un mínimo relativo**.

De $x = 3$, tenemos $y = 13'5/3^2 = 3/2 = 1'5$ m, **luego las dimensiones del depósito son $x = 3$ m. e $y = 1'5$ m.**

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.
La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 + x - 2 & -1 \\ \hline x - 2 & \end{array}$$

Recordamos que $I = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int \left(-1 + \frac{x-2}{x^2 + x - 2} \right) dx = -x + I_1$.

I_1 ya es racional y descomponemos el denominador en producto de factores:
Resolviendo $x^2 + x - 2 = 0$, obtenemos $x = 1$ y $x = -2$, luego $x^2 + x - 2 = (x - 1)\cdot(x + 2)$

$I_1 = \int \frac{x-2}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} dx = \int \frac{A dx}{(x-1)} + \int \frac{B dx}{(x+2)} = A\cdot\ln|x - 1| + B\cdot\ln|x + 2| = \{(*)\} =$
$= (-1/3)\cdot\ln|x - 1| + (4/3)\cdot\ln|x + 2|$.

(*) Calculamos A y B

$\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$. Igualando numeradores:
+ x - 2 = A(x + 2) + B(x - 1). (Le damos a "x" el valor de las raíces, 1 y -2)
De x = 1 $\rightarrow$ 1 - 2 = A(1 + 2) + B(1 - 1) = 3A, de donde -1 = 3A, luego A = -1/3.
De x = -2 $\rightarrow$ -2 - 2 = A(-2 + 2) + B(-2 - 1) = -3B, de donde -4 = -3B, luego B = 4/3.

Por tanto **I =** $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$ = - x + I_1 **= - x + (-1/3)·ln|x - 1| + (4/3)·ln|x + 2| + K.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Junio 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 0.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

a)
Discute el sistema según los valores de λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{segunda}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = -(λ)·(-λ + 1) + 0 - (λ)·(λ - 1) = -(λ)·(-λ + 1 + λ - 1) =
= -(λ)·(0) = 0.

Sea cual sea el valor de λ ∈ R, det(A) = 0, por tanto rango(A) < 3 siempre.

En A tomando el menor de orden 2, (dos primeras filas y dos primeras columnas),
$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}$ = 0 - λ = - λ, vemos que si **λ ≠ 0**, det(A) ≠ 0 y **rango(A) = 2.**

En A^* formamos el menor de orden 3 con las columnas 1ª, 2ª y 4ª, y por supuesto **λ ≠ 0**. Tomamos 1ª y 2ª pues con ellas he determinado el menor de orden 2 de A.

En A* como $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{segunda}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = -(λ)·(0 + 1) + 0 - (λ)·(λ - 1) = -(λ)·(1 + λ - 1) = - λ^2 ≠ 0,
puesto que λ ≠ 0**, por tanto rango(A*) = 3.**
Luego **si λ ≠ 0, rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, y el sistema es incompatible y no tiene solución**

Si **λ = 0** tenemos $A \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que ambas matrices están escalonadas por filas y tienen dos filas con elementos distinto de cero, por tanto su rango es dos, es decir si **λ = 0, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.**

b)

Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Hemos visto que **λ = 0, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.** Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos.

$x + y \quad = 0$

$\quad y - z = -1$

Tomo **z = b** $\in$ R, tenemos y = -1 + b y x = -(-1 + b) = 1 - b, y las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (1 - b, -1 + b, b)** con b $\in$ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Junio 2015

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a) [0'75 puntos] Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

(c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a)

Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

Con los puntos A, B y C formamos un plano π que tiene como punto el A y como vectores independientes el **AB** y **AC**. Después le imponemos la condición de que el punto D $\in \pi$.
Otra forma de hacerlo es viendo el rango de los vectores **AB, AC** y **AD.** Si el rango es 2 son coplanarios y si el rango es 3 no son coplanarios.

AB = (2,0,2); **AC** = (-1,1,-1). Vemos que son independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x)(0-2) - (y-1)(-2+2) + (z-1)(2-0) = -2x + 2z - 2 = 0 =$$

$= -x + z – 1 = 0$.

Como D $\in \pi \rightarrow$ -(2) + (m) - 1 = 0, de donde **m = 3 para que los puntos sean coplanarios.**

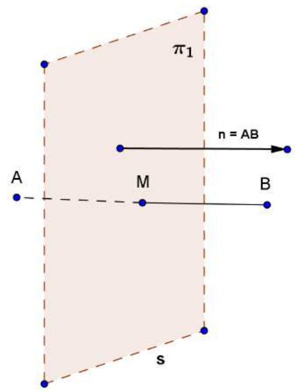
Veamos también que para rango(**AD,AB,AC**) = 2, det(**AD,AB,AC**) = 0, y saldrá m = 3.

$$\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & m-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -1(4 - (-1)(m-1)) = -4 - m + 1 = 0 \rightarrow m = 3.$$

(b)

Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

El plano π_1 que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.



AB = (2,0,2). Otro vector normal sería **n** = (1,0,1).
El punto medio del segmento AB es M((0+2)/2,(1+1)/2,(1+3)/2) = M(1,1,2).

Un plano paralelo a π_1 es x + z + K = 0, como M $\in$ π_1 $\rightarrow$ (1) + (2) + K = 0, de donde K = -3 y **el plano pedido es $\pi_1 \equiv$ x + z - 3 = 0.**
(c)
Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir la mitad del módulo (|| ||) del vector producto vectorial (x) de los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||.
AB = (2,0,2); **AC** = (-1-0, 2-1, 0-1) = (-1, 1, -1)**.**

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-2) - \mathbf{j}(-2+2) + \mathbf{k}(2-0) = (-2,0,2)$$

||**AB**x**AC**|| = $\sqrt{((2)^2+(0)^2+(2)^2)}$ = $\sqrt{(8)}$ = $2\sqrt{(2)}$
Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = (1/2)·$2\sqrt{(2)}$ u^2 = $\sqrt{(2)}$ u^2

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{x\cdot\operatorname{sen}(x)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{a(0)^2 + b(0) + 1 - \cos(0)}{0\cdot\operatorname{sen}(0)} = 0/0.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\rightarrow\infty$), con lo cual tenemos

$\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ = (0/0;L'H) = $\lim_{x\to 0}\dfrac{2ax+b+\operatorname{sen}(x)}{2x\cdot\cos(x^2)} = \dfrac{2a(0)+b+\operatorname{sen}(0)}{2(0)\cdot\cos(0^2)}$ = b/0.

Como me dicen que el límite existe y vale uno, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir b = 0, de donde **b = 0**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con b = 0, tenemos:

1 = $\lim_{x\to 0}\dfrac{2ax+\operatorname{sen}(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}$ = (0/0;L'H) = $\lim_{x\to 0}\dfrac{2a+\cos(x)}{2\cdot\cos(x^2)+2x\cdot\left(2x\cdot(-\operatorname{sen}(x^2))\right)}$ **= (2a + 1)/(2 + 0),** es decir **1 = (2a + 1)/2,** de donde 2 = 2a + 1, por tanto **a = 1/2.**
Los valores pedidos son **a = 1/2** y **b = 0**.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Determina la función f : (0,∞) → R sabiendo que f ''(x) = ln(x) y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1,2) (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

Por el Teorema fundamental del cálculo Integral que dice: Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función G(x) = $\int_a^x$ [f(t)]dt es derivable y su derivada es G '(x) = ($\int_a^x$ [f(t)]dt)' = f(x).

En nuestro caso, en la práctica f(x) = ∫ f '(x)dx; f '(x) = ∫ f ''(x)dx; f ''(x) = ∫ f '''(x)dx, etc…

Como la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto P(1,2), sabemos que **f '(1) = 0.**

Como la gráfica de f pasa por el punto P(1,2), sabemos que **f(1) = 2.**

Recordamos que **∫ln(x)dx = x·ln(x) - x**, pues **es una integral por partes** ∫u·dv = uv - ∫v·du.
∫ln(x)dx = { u = ln(x) → du = dx/x; dv = x → v = ∫dx = x } = x·ln(x) - ∫x·dx/x = x·ln(x) - ∫dx =
= x·ln(x) - x.

Empezamos **f '(x) =** ∫ f ''(x)dx = ∫ ln(x)dx **= x·ln(x) - x + K.**
Como f '(1) = 0 → (1)·ln(1) - 1 + K = 0, de donde K = 1, luego *f '(x) = x·ln(x) - x + 1.*

Análogamente f(x) = ∫ f '(x)dx = ∫ (x·ln(x) - x + 1)dx = ∫ (x·ln(x))dx - ∫ xdx + ∫ 1dx =
= I_1 - x^2/2 + x + L.
I_1 = ∫x·ln(x)) dx, es también integral por partes {u=ln(x) → du=dx/x; dv=xdx → v=∫xdx=x^2/2 }

I_1 = ∫x·ln(x)) dx=(x^2/2)·ln(x) - ∫(x^2/2)·(dx/x) = (x^2/2)·ln(x) - (1/2)∫(x·dx) = (x^2/2)·ln(x) - (1/2)(x^2/2) =
= (x^2/2)·ln(x) - (1/4)(x^2). Por tanto:
f(x) = I_1 - x^2/2 + x + L = (x^2/2)·ln(x) - (1/4)(x^2) - x^2/2 + x + L **= (x^2/2)·ln(x) - (3/4)(x^2) + x + L**.
Como f(1) = 2 → 2 = (1^2/2)·ln(1) - (3/4)(1^2) + 1 + L = 0 - 3/4 + 1 + L = 2, de donde tenemos que *L = 7/4*, y la función pedida es **f(x) = (x^2/2)·ln(x) - (3/4)(x^2) + x + 7/4**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Junio 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
(a) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a)

Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

A como máximo tiene rango 2 y B como máximo tiene rango 3.

Estudiamos A

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}$ = - m - 4.

Si |A| = 0 $\rightarrow$ - m - 4 = 0, de donde m = -4.

Si **m ≠ -4**, det(A) ≠ 0 y **rango (A) = 2**.
Si **m = -4**, det(A) = 0 y **rango (A) = 1**, porque tiene algún elemento distinto de cero..

Estudiamos B

det(B) = |B| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna = m(m + 4).

Si |B| = 0 $\rightarrow$ m·(m + 4) = 0, de donde m = 0 y m = -4.

Si **m ≠ 0** y **m ≠ -4**, det(B) ≠ 0 y **rango (B)) = 3**.

Si **m = 0**, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ = 4 ≠ 0, tenemos **rango (B) = 2.**

Si **m = -4**, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, y como me han quedado dos filas de la matriz con elementos distinto de cero, tenemos **rango (B) = 2.**

Luego para m = 0 tenemos rango(A) = rango(B) = 2,
(Me la ha comentado D. Javier García Gómez).
(a)
Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.
Ya hemos calculado los determinantes de A y B.

det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}$ = **- m - 4** y **det(B) = |B| =** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna **= m(m + 4).**

Nos están pidiendo valores de **m** con *det(A) = det(B),* es decir *- m - 4 = m(m + 4)*. Pasándolo todo a un miembro **0** = (m + 4) + m(m + 4) = **(1 + m)·(m + 4)**, de donde **m = - 1** y **m = - 4.**
Por tanto si **m = - 1** y **m = - 4** tenemos que **det(A) = det(B).**

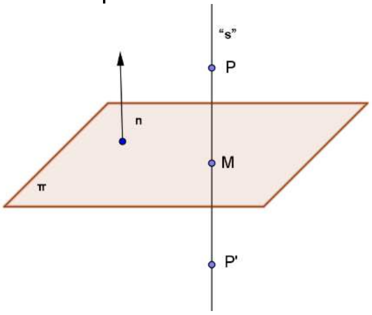
Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Junio 2015

Sea el plano π ≡ 2x + y - z + 8 = 0.
(a) [1'5 puntos] Calcula el punto P', simétrico del punto P(2,-1,5) respecto del plano π.
(b) [1 punto] Calcula la recta r', simétrica de la recta r ≡ (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1 respecto del plano π.

Solución

Sea el plano π ≡ 2x + y - z + 8 = 0.
(a)
Calcula el punto P', simétrico del punto P(2,-1,5) respecto del plano π.

Calculamos la recta "s" perpendicular ($\perp$), al plano π (el vector director **u** de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P. Determinamos M = $s\cap\pi$, y M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.

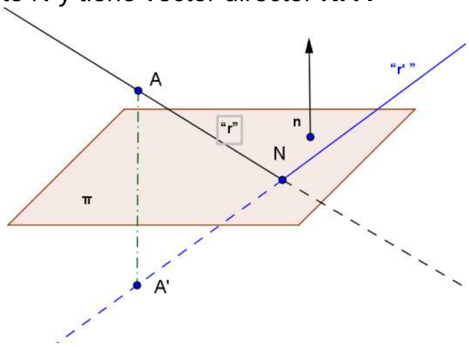


s(P;**u**) = s(P;**n**) con P(2,-1,5) y **n** = (2,1,-1).
Su ecuación vectorial es s $\equiv$ (x,y,z) = (2+2b,-1+b,5-b) con b $\in$ R.
M = $s\cap\pi$ $\rightarrow$ 2(2+2b) + (-1+b) - (5-b) + 8 = 0 = 6b+6, de donde **b = -1**, y el punto M es M(2+2(-1),-1+(-1),5-(-1)) = M(0,-2,6).

M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.
(0,-2,6) = ((2+x)/2,(-1+y)/2,(5+z)/2), de donde x = -2, y = -4+1 = -3, z = 12-5 = 7.

El simétrico pedido es P'(-2,-3,7).
(b)
Calcula la recta r', simétrica de la recta r $\equiv$ (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1 respecto del plano π.

Para calcular la recta r', simétrica de la recta r, se calcula el punto de corte N de r con π, el punto A' simétrico del punto A(2,-1,5) de la recta r respecto al plano π. La recta r' pedida es la que pasa por el punto de corte N y tiene vector director **NA'.**



Si nos damos cuenta ya hemos calculado el simétrico del punto (2,-1,5), que antes se le ha llamado P, luego A' es A'(-2,-3,7).

Ponemos r en vectorial r $\equiv$ (x,y,z) = (2-2c,-1+3c,5+c) con c $\in$ R.
N = $r\cap\pi$ $\rightarrow$ 2(2-2c) + (-1+3c) - (5+c) + 8 = 0 = -2c + 6, de donde c = 3 y el punto N es N(2-2(3),-1+3(3),5+(3)) = N(-4,8,8)
L recta r' es r'(N;**NA'**) con N(-4,8,8) y **NA'** = (-2-(-4),-3-(8),7-8) = (2,-11,-1).

La recta es r' $\equiv$ (x+4)/(2) = (y-8)/(-11) = (z-8)/(-1)