SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2015 MODELO 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

(2’5 puntos) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo se dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos. ¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

Solución

Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo se dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos.
¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

Es un problema de programación lineal, pero antes de poner las restricciones y la función objetivo nos fijamos en que **hay que poner las mismas unidades**; **todo en gramos o todo en kilogramos**.

100 g y 150 g de helado de chocolate = 0’1 y 0’15 kg de helado de chocolate
200 g y 150 g de helado de straciatella = 0’2 kg y 0’15 kg de helado de straciatella

Sea x = nº de tarrinas del primer tipo (A).
Sea y = nº de tarrinas del segundo tipo (B)..
Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Helado chocolate	Helado straciatella	Barquillos
Tarrina A (x)	0’1	0’2	1
Tarrina B (y)	0’15	0’15	2
Total	8	10	100

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

De “se dispone de 8 kg de helado de chocolate” $\rightarrow$ 0’1x + 0’15y ≤ 8.
De “se dispone de 10 kg de helado de straciatella” $\rightarrow$ 0’2x + 0’15y ≤ 10.
De “se dispone de 100 barquillos” $\rightarrow$ x + 2y ≤ 100.
De “se fabrica alguna tarrina del tipo A y del tipo B” $\rightarrow$ x ≥ 0, y ≥ 0.
De “Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas”, tenemos la función a optimizar es F(x,y) = x + y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = x + y.
Restricciones: 0’1x + 0’15y ≤ 8; 0’2x + 0’15y ≤ 10; x + 2y ≤ 100; x ≥ 0; y ≥ 0

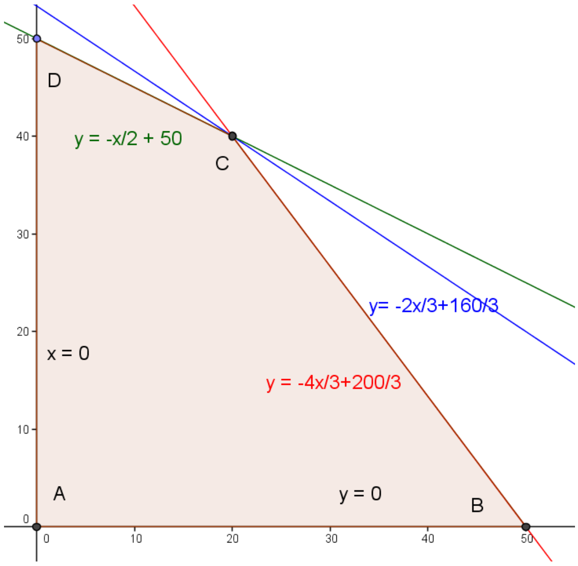
Las desigualdades 0’1x + 0’15y ≤ 8; 0’2x + 0’15y ≤ 10; x + 2y ≤ 100; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, 0’1x + 0’15y = 8; 0’2x + 0’15y = 10; x + 2y = 100; x = 0; y = 0
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
y = -2x/3 + 160/3; y = -4x/3 + 200/3; y = -x/2 + 50; x = 0; y = 0

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el vértice A(0,0).
De y = 0 e y = -4x/3+200/3, tenemos 0 = -4x/3+200/3 $\rightarrow$ 4x = 200 $\rightarrow$ x = 50, y el vértice es B(50,0).
De y = -4x/3+200/3 e y = -x/2+50, tenemos -4x/3+200/3 = -x/2 + 50 $\rightarrow$ -8x+400 = -3x + 300 $\rightarrow$ 100 = 5x, de donde x = 20, con lo cual y = -(20)/2+50= -10+50 = 40, y el vértice es C(20,40).
De x = 0 e y = -x/2 + 50, tenemos y = 50, y el vértice es D(0,50).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(50,0), C(20,40) y D(0,50).

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, que es el polígono conexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = x + y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos f en los puntos anteriores A(0,0), B(50,0), C(20,40 y D(0,50). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = (0) + (0) = 0; F(50,0) = (50) + (0) = 50;
F(20,40) = (20) + (40) **= 60**; F(0,50) = (0) + (50) = 50.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 60** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(20,40), por tanto <u>para repartir el máximo número posible de tarrinas hay que fabricar 20 del primer tipo y 40 del segundo tipo</u>.**

EJERCICIO 2 (A)

a) (1'5 puntos) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{3\cdot\ln(x)}{x^3}, \qquad g(x) = (1 - x^2)\cdot(x^3 - 1)^2, \qquad h(x) = 3x^2 - 7x + \frac{1}{e^{2x}}$$

b) (1 punto) Halle las asíntotas de la función $p(x) = \dfrac{7x}{3x - 12}$

Solución

a) (1'5 puntos) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{3\cdot\ln(x)}{x^3}$, $f'(x) = \dfrac{(3/x)\cdot x^3 - 3\cdot\ln(x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{3x^2 - 9x^2\cdot\ln(x)}{x^6} = \dfrac{3x^2\cdot(1 - 3\ln(x))}{x^6}$,

$g(x) = (1 - x^2)\cdot(x^3 - 1)^2$, $g'(x) = -2x\cdot(x^3 - 1)^2 + (1 - x^2)\cdot 2\cdot(x^3 - 1)\cdot 3x^2 = -2x\cdot(x^3 - 1)\cdot[(x^3 - 1) - 3x\cdot(1 - x^2)] =$
$= -2x\cdot(x^3 - 1)\cdot(4x^3 - 3x - 1) = -8x^7 + 6x^5 + 10x^4 - 6x^2 - 2x.$

$h(x) = 3x^2 - 7x + \dfrac{1}{e^{2x}} = 3x^2 - 7x + e^{-2x}$; $h'(x) = 6x - 7 - 2\cdot e^{-2x} = 6x - 7 - \dfrac{2}{e^{2x}}$

b)

Halle las asíntotas de la función $p(x) = \dfrac{7x}{3x - 12}$

La recta x = a es una asíntota vertical de f si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4+} \dfrac{7x}{3x - 12} = (28/0^+) = +\infty$, **la recta x = 4** (nº que anula el denominador de p(x)) **es una asíntota vertical de p(x)**.

Para la posición relativa $\lim_{x\to 4^-} p(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{7x}{3x - 12} = (28/0^-) = -\infty$.

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas de igual grado numerador y denominador, tienen una asíntota horizontal, y es la misma en $\pm\infty$.

La recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de f si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Como $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{3x - 12} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{3} = 7/3 \cong 2'33$, **la recta y = 7/3 es una asíntota horizontal de p(x).**

Como $\lim_{x\to+\infty} (\, p(x) - 7/3\,) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{7x}{3x - 12} - \frac{7}{3}\right) = 0^+$, p(x) está por encima de la A.H. y = 7/3 en $+\infty$.

Como $\lim_{x\to-\infty} (\, p(x) - 7/3\,) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{7x}{3x - 12} - \frac{7}{3}\right) = 0^-$, p(x) está por debajo de la A.H. y = 7/3 en $-\infty$.

EJERCICIO 3 (A)

De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60% de los hombres y el 70% de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

b) (1 punto) Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

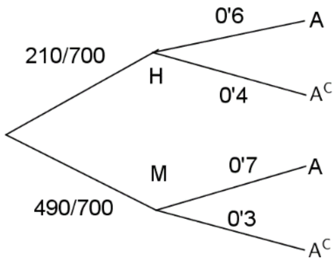
Solución

De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60% de los hombres y el 70% de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.

Llamemos H, M, A y A^C, a los sucesos siguientes, "ser hombre", "ser mujer", "aprobar " y "suspender ", respectivamente.

Datos del problema p(H) = 210/700; p(M) = 490/700; p(A/H) = 60% = 0'6; p(A/M) = 70% = 0'7,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea roja (R) es:

p(aprobar) = p(A) = p(H).p(A/H) + p(M).p(A/M) = (21/70)·(0'6) + (49/70)·(0'7) **= 67/100 = 0'67**.

b)

Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(M/A)} = \frac{p(M\cap A)}{p(A)} = \frac{p(M).p(A/M)}{p(A)} = \frac{(49/70)\cdot(0'7)}{0'67} = \mathbf{(49/67) \cong 0'73}.$$

EJERCICIO 4 (A)

La calificación en Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1'2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones: 3 8 6 3 9 1 7 7 5 6.

a) (1'75 puntos) Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de significación del 5%, plantee el contraste unilateral correspondiente ($H_0 : \mu \le 5$), determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.

b) (0'75 puntos) ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?

Solución

La calificación en Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1'2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones: 3 8 6 3 9 1 7 7 5 6.

a) (1'75 puntos) Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de significación del 5%, plantee el contraste unilateral correspondiente ($H_0 : \mu \leq 5$), determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.
b) (0'75 puntos) ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?
a)
Del problema tenemos desviación típica poblacional = σ = 1'2, tamaño de la muestra n = 10, media = $\mu = \overline{x}$ = (3+8+6+3+9+1+7+7+5+6)/10 = 55/10 = 5'5, luego $X \to N(\mu,1'2)$, y *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(5'5, \frac{1'2}{\sqrt{10}})$
Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.
También nos dicen que $H_0 : \mu_0 \leq 5$, con un nivel de significación de α = 5% = 0'05.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

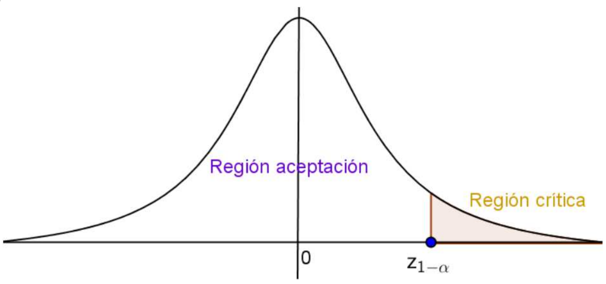
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \leq 5$ (la calificación media es a lo sumo 5 puntos) y $H_1 : \mu_0 > 5$, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste unilateral por la derecha*, *por tanto la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0,95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos $\mathbf{z_{1-\alpha}}$ **=** (1'64 + 1'65)/2 **= 1'645**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5'5 - 5}{1'2/\sqrt{10}} \cong 1'3176$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 1'3176 está a la izquierda del punto crítico $\mathbf{z_{1-\alpha}}$ **= 1'645**, estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \leq 5$, para un nivel de significación α = 0'05.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos.
b)
¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?
Lo único que tendríamos que hacer es calcular el punto crítico $\mathbf{z_{1-\alpha}}$, y ver si el observado $\mathbf{z_0}$ está a la derecha o a la izquierda del punto crítico $\mathbf{z_{1-\alpha}}$.
Para el nivel de significación es α = 15% = 0'15, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0,85.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'15 = 0'85$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'8508 que corresponden al tanto el **valor crítico $z_{1-\alpha} = 1'04$**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Como el valor observado **$z_0 \cong 1'3176$** *está a la derecha del punto crítico* **$z_{1-\alpha} = 1'04$, rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 5$, y aceptaríamos la alternativa H_1: $\mu_0 > 5$, es decir con una probabilidad de equivocarnos del 15%, afirmamos que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es superior a 5 puntos.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1'7 puntos) Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.
b) (0'8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$A + D = C$ $\qquad$ $A \cdot D = C^t$ $\qquad$ $D \cdot A = C$ $\qquad$ $D \cdot A = C^t$

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C_{3x2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. C^t_{2x3}

a)
Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.

si $X + Y = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, de donde $Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - X$.

De $X + B = 2Y$, tenemos $X + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\left(\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - X\right) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} - 2X$, luego $3X = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{X} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b)
Analice cuáles de las siguientes operaciones con matices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$A_{2x2} + D = C_{3x2}$, ***no se puede realizar*** **porque <u>para sumar matrices tienen que tener el mismo orden y la suma es también del mismo orden</u>.**

$A_{2x2} \cdot D_{2x3} = C^t_{2x3}$, ***si se puede realizar*** **porque <u>para multiplicar matrices las columnas de la 1ª deben coincidir con las filas de la 2ª, y el resultado es filas de la 1ª y columnas de la 2ª</u>.**

$D_{3x2} \cdot A_{2x2} = C_{3x2}$, ***si se puede realizar*** **porque <u>para multiplicar matrices las columnas de la 1ª deben coincidir con las filas de la 2ª, y el resultado es filas de la 1ª y columnas de la 2ª</u>.**

$D \cdot A_{2x2} = C^t_{2x3}$, ***no se puede realizar*** **porque <u>para multiplicar matrices las columnas de la 1ª deben coincidir con las filas de la 2ª, y el resultado es filas de la 1ª y columnas de la 2ª.</u>**

EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x + a}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Determine el valor de a para que la función sea continua.
b) (0'75 puntos) ¿Para a = -10, es creciente la función en x = 3?
c) (0'75 puntos) Halle sus asíntotas para a = -10.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x + a}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a)
Determine el valor de a para que la función sea continua.

La función $x^2 + 2$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular lo es en el intervalo (0,2).

La función $\dfrac{8x + a}{x - 1}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en todo R – {1} (número que anula el denominador), en particular lo es en el intervalo (2,+∞).
Veamos la continuidad de f en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 2) = (2)^2 + 2 = 6$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{8x + a}{x - 1} = (16 + a)/1 = 16 + a$, como tienen que ser iguales tenemos **6 = 16 + a, de donde a = -10 para que f sea continua.**

b)
¿Para a = -10, es creciente la función en x = 3?

Par a = -10, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x - 10}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$. x = 3 está en la rama x > 2, luego $f(x) = \dfrac{8x - 10}{x - 1}$.

Sabemos que una función es creciente en x = 3 si f ‘(3) > 0.

$f(x) = \dfrac{8x - 10}{x - 1}$; $f'(x) = \dfrac{8\cdot(x - 1) - (8x - 10)\cdot 1}{(x - 1)^2}$.

Como $f'(3) = \dfrac{8\cdot(3 - 1) - (8(3) - 10)\cdot 1}{(3 - 1)^2} = \dfrac{16 - 14}{4} = 2/4 = 1/2 > 0$, **f(x) es creciente en x = 3, en realidad es estrictamente creciente.**

c)
Halle sus asíntotas para a = -10.

Para a = -10, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x - 10}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

En $0 \le x \le 2$, $f(x) = x^2 + 2$, es un trozo de función polinómica que sabemos no tiene asíntotas.

Veamos las asíntotas para x > 2, donde $f(x) = \dfrac{8x - 10}{x - 1}$

La recta x = a es una asíntota vertical de f si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{8x - 10}{x - 1} = (-2/0^+) = -\infty$, **la recta x = 1** (nº que anula el denominador de p(x)) **NO es una asíntota vertical de f(x) porque x = 1 <u>no está en x > 2</u>**.

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas de igual grado numerador y denominador, tienen una asíntota horizontal, y es la misma en ± ∞, en nuestro caso sólo la estudiamos en + ∞.

La recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de f si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{8x - 10}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{8x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 8 = 8$, **la recta y = 8 es una asíntota horizontal de f(x).**

Como $\lim_{x\to+\infty} (f(x) – 8) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{8x - 10}{x - 1} - 8\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. y = 8 en + ∞.

EJERCICIO 3 (B)

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.
a) (1'25 puntos) Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?
b) (1'25 puntos) Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

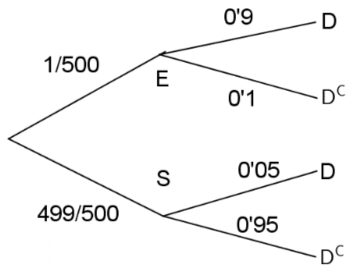
Solución

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.
a)
Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

Llamemos E, S, D y D^C, a los sucesos siguientes, "estar enfermo", "estar sano", "ser detectado" y "no ser detectado", respectivamente.

Datos del problema p(E) = 1/500; p(S) = 499/500; p(D/E) = 90% = 0'9 ; p(D/S) = 5% = 0'05, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



p(ser diagnosticado correctamente) =

= **p(ser detectado estando enfermo ó no ser detectado estando sano) =**
= p(E).p(D/E) + p(S).p(D^C/S) = (1/500)·(0'9) + (499/500)·(0'95) **= 9499/10000 = 0'9499**.

b)
Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de ser diagnosticado como enfermo, estando o no enfermo es:

p(D) = p(E).p(D/E) + p(S).p(D/S) = (1/500)·(0'9) + (499/500)·(0'05) = 517/10000 = 0'0517.

Me piden **p(E/D) y p(S/D).** Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(E/D) =} \frac{p(E\cap D)}{p(D)} = \frac{p(E).p(D/E)}{p(D)} = \frac{(1/500)\cdot(0'9)}{0'0517} \textbf{ = (18/517)} \cong \textbf{0'0348}.$$

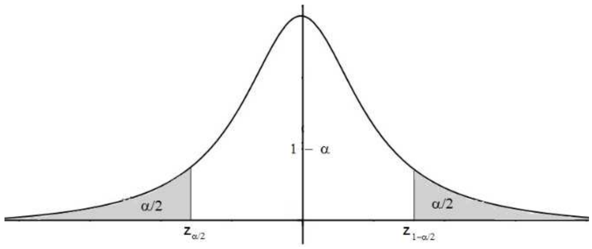
$$\textbf{p(S/D) =} \frac{p(S\cap D)}{p(D)} = \frac{p(S).p(D/S)}{p(D)} = \frac{(499/500)\cdot(0'05)}{0'0517} \textbf{ = (499/517)} \cong \textbf{0'9652}.$$

EJERCICIO 4 (B)

Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores, de tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza σ^2 = 0'25 mm^2. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.
b) (1 punto) Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores, de tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza σ^2 = 0'25 mm^2. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.

a)
Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.

Datos del problema: n = 64; $\overline{x}$ = 20; σ^2 = 0'25, luego σ = 0'5; nivel de confianza = 98% = 0'98 = 1 - α, de donde α = 1 – 0'98 = 0'02, con la cual α/2 = 0'02/2 = 0'01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'99 vemos que no viene, y la mas próxima es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(20 - 2'33\cdot\frac{0'5}{\sqrt{64}}, 20 + 2'33\cdot\frac{0'5}{\sqrt{64}}\right)$ **= (19'854375,20'145625)**

b)
Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

Datos del problema: Amplitud = b – a = 2; Error = E = Amplitud/2 = (b - a)/2 = 2/2 = 1, σ = 0'5, igual nivel de confianza = 98% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = (b - a)/2 = 1, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{2'33\cdot 0'5}{1}\right)^2$ = 1'357225, es decir **el tamaño mínimo es de n = 2 tubos.**