SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2016 MODELO 6

OPCIÓN A

16_mod6_EJERCICIO 1 (A)

Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$.

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3.
Manuel desea comprar 5 unidades de A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3.

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1'8 puntos) Calcule $P\cdot Q^t$ y $Q\cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.
b) (0'7 puntos) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

Solución

Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$.

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3.
Manuel desea comprar 5 unidades de A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3.

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule $P\cdot Q^t$ y $Q\cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

Tenemos las matrices, para entender el significado de las matrices resultantes, siguientes:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \text{ y } Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Cati=Ca} \\ \text{Manuel = Ma} \end{array} .\ Q^t = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} Ca & Ma \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ y } P^t = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 20 & 25 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P\cdot Q^t = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 160 \\ 122 & 157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Observamos que a_{11} = **115** = precio de los artículos en el supermercado C_1 por los que desea comprar Ca.
Observamos que a_{12} = 160 = precio de los artículos en el supermercado C_1 por los que desea comprar Ma.
Observamos que a_{21} = 122 = precio de los artículos en el supermercado C_2 por los que desea comprar Ca.
Observamos que a_{22} = **157** = precio de los artículos en el supermercado C_2 por los que desea comprar Ma.

$$Q\cdot P^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 20 & 25 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 122 \\ 160 & 157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Observamos que b_{11} = **115** = los artículos que desea comprar Ca por el precio de los artículos en el supermercado C_1.
Observamos que b_{12} = 122 = los artículos que desea comprar Ca por el precio de los artículos en el supermercado C_2.
Observamos que b_{21} = 160 = los artículos que desea comprar Ma por el precio de los artículos en el supermercado C_1.
Observamos que b_{22} = **157** = los artículos que desea comprar Ma por el precio de los artículos en el supermercado C_2.

b)
A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

Visto lo anterior a Cati le interesa comprar en el supermercado C_1 y a Manuel en el supermercado C_2.

16_mod6_EJERCICIO 2 (A)

a) (1'2 puntos) Calcule los valores de "a" y "b" para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1'3 puntos) Para a = 1 y b = 2, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

Solución

a)

Calcule los valores de "a" y "b" para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en el punto de abscisa $x = 1$.

Sabemos que si la función es derivable en x = 1, también es continua en x = 1.
Estudiamos primero la continuidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{b}{2-x}\right) = \dfrac{b}{2-1} = b$;

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax^2 - 3x + 1) = (a(1)^2 - 3(1) + 1) = a - 2$, como tienen que ser iguales tenemos *b = a – 2.*

f(x) es derivable en x = 1 si $f'(1^-) = f'(1^+)$ (Vemos la continuidad de la derivada)

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-b\cdot(-1)}{(2-x)^2} & \text{si } x \le 1 \\ 2ax - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{b}{(2-x)^2} & \text{si } x \le 1 \\ 2ax - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{b}{(2-x)^2}\right) = \dfrac{b}{(2-1)^2} = b$.

$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2ax - 3) = 2a - 3$, , como tienen que ser iguales tenemos *b = 2a – 3***.**

Tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} b = 2a - 3 \\ b = a - 2 \end{cases}$. Igualando b = b $\to$ a - 2 = 2a - 3 $\to$ **1 = a**, con lo cual **b =** 2(1) - 3 = **-1.**

Los valores pedidos son a = 1 y b = -1.

b)

Para a = 1 y b = 2, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

Para a = 1 y b = 2 tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \le 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Se observa que la función no es continua en x = 1 porque $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \ne \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si x < 1, $f'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2}$.

De f '(x) = 0 tenemos 2 = 0, lo cual es absurdo, es decir f siempre es creciente o decreciente en x < 1.

Como f '(0) = 2/4 > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,1)$.

Si x > 1, f '(x) = 2x - 3.

De f '(x) = 0, tenemos 2x - 3 = 0, luego x = 3/2 = 1'5 es un posible extremo relativo.

Como f '(1'1) = 2(1'1) – 3 = - 0'8 < 0, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (1,1'5).

Como f '(2) = 2(2) - 3 = 1 > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1'5,+\infty)$.

Aunque no lo pidan, por definición x = 1'5 es un mínimo relativo que vale f(1'5) = (1'5)² - 3(1'5) + 1 = -1'25.

Aunque no lo pidan, x = 1 no es extremo relativo, porque la función no es continua en x = 1, aunque a izquierda y derecha del 1 cambie la monotonía.

Veamos las asíntotas.

Para x > 1, tenemos $f(x) = x^2 - 3x + 1$ que es una función polinómica y no tiene asíntotas.

Para x < 1, tenemos $f(x) = \frac{2}{2 - x}$, cuya gráfica es un hipérbola y tiene asíntota vertical (número que anula el denominador, si está en el dominio) y asíntota horizontal (en este caso en - ∞).

De 2 - x = 0, tenemos x = 2, que no está en el dominio $x \le 1$, **luego no tiene asíntota vertical.**

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2}{2 - x}\right) = 2/-(-\infty) = 2/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en - ∞.**

16_mod6_EJERCICIO 3 (A)

Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (0'8 puntos) Llevar un traje rojo y unos zapatos blancos.
b) (0'9 puntos) No ir toda vestida de blanco.
c) (0'8 puntos) Calzar zapatos azules o blancos.

Solución

Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos:
a)
Llevar un traje rojo y unos zapatos blancos.

Sean las sucesos T = traje, Z = zapato. T_R, T_A, T_B, Z_R, Z_A, Z_B, son respectivamente los sucesos traje rojo, traje azul, traje blanco, zapato rojo, zapato azul y zapato blanco.

Tenemos 2 T_R,1 T_A y 1 T_B. Tenemos 1 Z_R,1 Z_A y 2 Z_B.

El llevar un traje es independiente del llevar zapato, por tanto si tengo una intersección la probabilidad será el producto de las probabilidades de los sucesos de la intersección.

Me piden **p(traje rojo y zapatos blancos) = $p(T_R \cap Z_B) = p(T_R)\cdot p(Z_B)$ = (2/4)·(2/4) = 4/16 = 1/4 = 0'25.**
b)
No ir toda vestida de blanco.

Me piden **p(contrario de ir toda vestida de blanco).**
Tenemos *p(toda vestida de blanco) = $p(T_B \cap Z_B) = p(T_B)\cdot p(Z_B)$ = (1/4)·(2/4) = 2/16 = 1/8*.

Por tanto **p(contrario de ir toda vestida de blanco) = 1 - p(ir toda vestida de blanco) =**
= 1 - 1/8 = 7/8 = 0'875.
c)
(0'8 puntos) Calzar zapatos azules o blancos.

Sólo me fijo en los zapatos. Hay 3 pares, entre azules y blancos, de un total de 4 pares de zapatos, luego **p(zapatos azules o blancos) = 3/4.**

16_mod6_EJERCICIO 4 (A)

Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2'5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18'5 14 16'5 19 20 20'5 17 18'5 18.

a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el error máximo cometido en esta estimación?
c) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

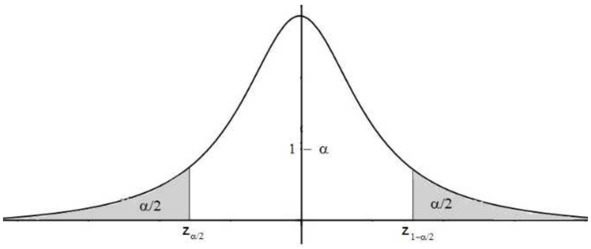
Solución

Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2'5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18'5 14 16'5 19 20 20'5 17 18'5 18.

a)
Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: n = 10; $\overline{x}$ = (18+18'5+14+16'5+19+20+20'5+17+18'5+18)/10 = 18; σ = 2'5; nivel de confianza = 96% = 0'96 = 1 - α, de donde α = 0'04, con la cual α/2 = 0'04/2 = 0'02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'98 no viene, y que la probabilidad más próxima es 0'9798, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'05$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(18 - 2'05\cdot\frac{2'5}{\sqrt{10}}, 18 + 2'05\cdot\frac{2'5}{\sqrt{10}}\right) \cong$ **(16'379332,19'620667)**

b)
¿Cuál es el error máximo cometido en esta estimación?

También sabemos que **el error máximo de la estimación es menor** que el radio del intervalo, es decir $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'05\cdot\frac{2'5}{\sqrt{10}} \cong$ **1'620667**.

c)
Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

Datos del problema: Error = E ≤ 1, σ = 2, igual nivel de confianza = 96% que nos daba $z_{1-\alpha/2} = 2'05$.

De error = $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 =$

$= \left(\frac{2'05\cdot 2'5}{1}\right)^2$ = 26'2656, es decir **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 27.**

OPCION B

16_mod6_EJERCICIO 1 (B) (Corregido)
(2'5 puntos) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y de 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de 1 hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes

para el destinado a la máquina.
Si el beneficio por unidad de cada tipo de alfombra es de 150€ y 100€, respectivamente, ¿Cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

Solución

(2'5 puntos) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y de 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de 1 hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes para el destinado a la máquina.
Si el beneficio por unidad de cada tipo de alfombra es de 150€ y 100€, respectivamente, ¿Cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de alfombras de seda.
Sea y = nº de alfombras de lana.
Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Horas Manual	Horas A máquina
De seda (x)	2	2
De lana (y)	3	1
Total	600	480

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

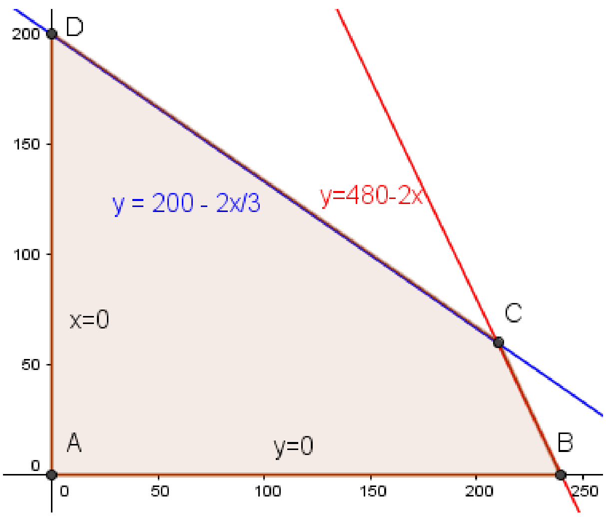
De "Manual, se necesitan 2 horas para seda y 3 horas para lana" → $2x + 3y \le 600$.
De "A máquina, se necesitan 2 horas para seda y 1 hora para lana" → $2x + y \le 480$.
De "se fabrica alguna alfombra de seda o lana" → $x \ge 0$, $y \ge 0$.
De "Beneficio por unidad de cada tipo de alfombra es de 150€ y 100€, respectivamente", tenemos que la función a optimizar es F(x,y) = 150x + 100y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 150x + 100y.
Restricciones: $2x + 3y \le 600$; $2x + y \le 480$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $2x + 3y \le 600$; $2x + y \le 480$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $2x + 3y = 600$; $2x + y = 480$; $x = 0$; $y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = 200 - 2x/3$; $y = 480 - 2x$; $x = 0$; $y = 0$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice A(0,0).
De $y = 0$ e $y = 480 - 2x$, tenemos $0 = 480 - 2x \rightarrow 2x = 480 \rightarrow x = 480/2 = 240$, y el vértice es B(240,0).
De $y = 480 - 2x$ e $y = 200 - 2x/3$, tenemos $480 - 2x = 200 - 2x/3 \rightarrow 1440 - 6x = 600 - 2x \rightarrow 840 = 4x \rightarrow$
$\rightarrow x = 210$, con lo cual $y = 480 – 2(210) = 60$, y el vértice es C(210,60).
De $x = 0$ e $y = 200 - x$, tenemos $y = 200$, y el vértice es D(0,200).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(240,0), C(210,60) y D(0,200).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 150x + 100y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(240,0), C(210,60) y D(0,200). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 150(0) + 100(0) = 0; F(240,0) = 150(240) + 100(0) = 36000;
F(90,120) = 150(210) + 100(60) **= 37500**; F(0,200) = 150(0) + 100(200) = 20000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 37500** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(210,60),** es decir **<u>el beneficio máximo es de 37500€ y se alcanza fabricando 210 alfombras de seda y 60 de lana</u>.**

16_mod6_EJERCICIO 2 (B)

La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{150 + 5x}{100} & \text{si } \ 10 \le x \le 50 \\ \dfrac{200 + 10x}{25 + 3x} & \text{si } \ x > 50 \end{cases}$$

Donde C y x están expresadas en miles de euros.
a) (1 punto) Justifique que C es una función continua.
b) (1 punto) ¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos? ¿Cuál es el valor máximo de C?
c) (0'5 puntos) Calcule la asíntota horizontal e interprételа en el contexto del problema.

Solución

La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{150 + 5x}{100} & \text{si } \ 10 \le x \le 50 \\ \dfrac{200 + 10x}{25 + 3x} & \text{si } \ x > 50 \end{cases}$$, donde C y x están expresadas en miles de euros.

a)
Justifique que C es una función continua.

La función $(150 + 5x)/100$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular lo es en el intervalo (10,50).

La función $\dfrac{200 + 10x}{25 + 3x}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en todo R - {-25/3} (número que anula el denominador), en particular lo es en el intervalo $(50,+\infty)$.
Veamos la continuidad de C(x) en x = 50.

C(x) es continua en x = 50 si $C(50) = \lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50^+} C(x)$.
$C(2) = \lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50^-} [\ (150 + 5(x)) / 100\ ] = (150 + 5(50)) / 100 = 4$;

$\lim_{x\to 50+} C(x) = \lim_{x\to 50+} \frac{200 + 10x}{25 + 3x} = \frac{200 + 10(50)}{25 + 3(50)}$ = 4.Como ambos valores son iguales, 4 = 4, **la función C(x) es continua en x = 4, por tanto C(x) es continua en 10 ≤ x ≤ +∞.**

b)

¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos? ¿Cuál es el valor máximo de C?

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada C '(x).

$$C(x) = \begin{cases} \frac{150 + 5x}{100} & \text{si } 10 \le x \le 50 \\ \frac{200 + 10x}{25 + 3x} & \text{si } x > 50 \end{cases},$$

$$C'(x) = \begin{cases} \frac{5x}{100} & \text{si } 10 < x < 50 \\ \frac{10\cdot(25 + 3x) - (200 + 10x)\cdot 3}{(25 + 3x)^2} & \text{si } x > 50 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{20} & \text{si } 10 < x < 50 \\ \frac{-350}{(25 + 3x)^2} & \text{si } x > 50 \end{cases},$$

Si x < 50, C '(x) = x/20.

De C '(x) = 0 tenemos x = 0, posible extremo, pero no está en el dominio (10 ≤ x ≤ 50).

Como C '(20) = 20/20 = 1 > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (10,50).

Si x > 50, C '(x) = $-350/(25 + 3x)^2$.

De C '(x) = 0, tenemos -350 = 0, que es absurdo, luego esta rama siempre es creciente o decreciente.

Como C '(60) = $-350/(25 + 3(60))^2$ = - 350/42025 < 0, luego C(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (50,+∞).

Vemos que C(x) empieza a decrecer para x > 50, es decir a partir de una liquidez mayor de 50000€

Por definición x = 50 es un máximo relativo (a su izquierda $(\nearrow)$ y a su derecha $(\searrow)$), que vale c(50) = 4, **es decir el valor máximo de C(x) es 4 (4000€).**

c)

Calcule la asíntota horizontal e interprételа en el contexto del problema.

Veamos las asíntotas.

La asíntota horizontal está en ± ∞, en nuestro caso en + ∞, es decir tomamos la rama C(x) = $\frac{200 + 10x}{25 + 3x}$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \frac{200 + 10x}{25 + 3x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10x}{3x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{3x}$ = 10/3 , **la recta y =10/3 es la asíntota horizontal en + ∞, es decir aunque la liquidez C(x), empieza a decrecer para x > 50, el valor de C(x) no llega a tocar el valor de 10/3 ≅ 3'3333 , luego el crédito C está siempre por encima de 3333'33€**

16_mod6_EJERCICIO 3 (B)

En una encuesta sobre la nacionalidad de los veraneantes en un municipio de la costa andaluza, se ha observado que el 40% de los encuestados son españoles y el 60% extranjeros, que el 30% de los españoles y el 80% de los extranjeros residen en un hotel y el resto en otro tipo de residencia.

Se elige al azar un veraneante del municipio.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no resida en un hotel?

b) (1 punto) Si no reside en un hotel, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

c) (0'5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel"?

Solución

En una encuesta sobre la nacionalidad de los veraneantes en un municipio de la costa andaluza, se ha observado que el 40% de los encuestados son españoles y el 60% extranjeros, que el 30% de los españoles y el 80% de los extranjeros residen en un hotel y el resto en otro tipo de residencia.

Se elige al azar un veraneante del municipio.

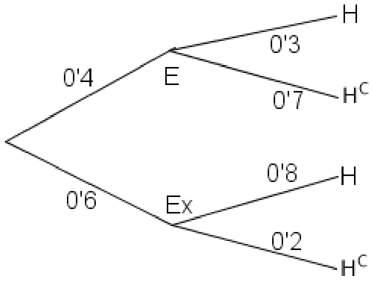
a)

¿Cuál es la probabilidad de que no resida en un hotel?

Llamemos E, Ex, H y H^C, a los sucesos siguientes, "ser español", "ser extranjero", "residir en hotel" y " residir en hotel", respectivamente.

Datos del problema p(E) = 40% = 0'4; p(Ex) = 60% = 0'6; p(H/E) = 30% = 0'3 ; p(H/Ex) = 80% = 0'8, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :

p(no resida en un hotel) = $p(E).p(H^C/E) + p(Ex).p(H^C/Ex) = (0'4)\cdot(0'7) + (0'6)\cdot(0'2)$ **= 2/5 = 0'4**.

b)
Si no reside en un hotel, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(E/H^C) =} \frac{p\left(E \cap H^C\right)}{p(H^C)} = \frac{p\left(E).p(H^C/E\right)}{p(H^C)} = \frac{(0'4)\cdot(0'7)}{0'4} \mathbf{= 0'7}.$$

c)
¿Son independientes los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel"?

Son independientes si $p(Ex\cap H) = p(Ex)\cdot p(H)$
Tenemos $p(Ex\cap H) = p(Ex).p(H/Ex) = (0'6)\cdot(0'8) = 0'48$. También $p(Ex)\cdot p(H) = (0'6)\cdot(1 - 0'4) = 0'6^2 = 0'36$.
Como 0'48 ≠ 0'36, los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel" son dependientes.

16_mod6_EJERCICIO 4 (B)
El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y de desviación típica 8 kg.
a) (0'75 puntos) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?
b) (1'75 puntos) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

Solución

El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y de desviación típica 8 kg.
a)
¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?

Sabemos, por el Teorema Central del límite, que si una variable aleatoria X sigue una normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ es la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, entonces la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, donde n es el tamaño de la muestra y $\mu = \overline{x}$.

Si X no siguiese una normal pero $n \geq 30$, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ si sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

En nuestro caso la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(65, \frac{8}{\sqrt{64}}) = N(65,1)$.

b)
Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

Sabemos, por el Teorema Central del límite, que si una variable aleatoria X sigue una normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ es la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, entonces la distribución muestral de medias $\overline{X}$

sigue una normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), donde n es el tamaño de la muestra y $\mu = \overline{x}$.

Si X no siguiese una normal pero n ≥ 30, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ si sigue una normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

En nuestro caso la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal N(65, $\frac{8}{\sqrt{100}}$) = N(65,0'8).

Me están pidiendo **p(64 < $\overline{X}$ < 65) =** { tipifico Z = $\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } = p($\frac{64 - 65}{0'8}$ < Z < $\frac{65 - 65}{0'8}$) = p(-1'25 < Z < 0) =
= p(Z < 0) - p(Z < -1'25) = p(Z < 0) - [1 - p(Z ≤ 1'25)] = {mirando en las tablas de la N(0,1) } =
= 0'5 – (1 – 0'8944) **= 0'3944**.