OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz A^{2017}.

b) (1'5 puntos) ¿Se verifica la expresión $(B + A)\cdot(B - A) = B^2 - A^2$?

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a)

Calcule la matriz A^{2017}.

Calculamos primero A^2 y A^3.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. $A^3 = A^2\cdot A = I_2\cdot A = A$.

Parece ser que las potencias pares de A dan la matriz identidad I_2, y las potencias impares dan la matriz A. Veámoslo. (Recordamos que para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes)

$\mathbf{A^{2016}} = (A^2)^{1008} = (I_2)^{1008} = \mathbf{I_2}$ y $\mathbf{A^{2017}} = A^{2016}\cdot A = I_2\cdot A = \mathbf{A}$**, luego** $\mathbf{A^{2017} = A}$**.**

b)

¿Se verifica la expresión $(B + A)\cdot(B - A) = B^2 - A^2$?

Sabemos que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa, luego **en general la expresión** dada $(B + A)\cdot(B - A) = B^2 - A^2$ **es falsa porque B·A es distinto de A·B**.

Veámoslo en nuestro caso concreto:

$(B + A)\cdot(B - A) = B^2 - B\cdot A + A\cdot B - A^2$. En nuestro caso si $B\cdot A = A\cdot B$ si sería cierto.

$B\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **Como** $\mathbf{B\cdot A \neq A\cdot B}$ **la expresión dada** $\mathbf{(B + A)\cdot(B - A) = B^2 - A^2}$ **es falsa en nuestro caso concreto de** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**.**

EJERCICIO 2 (A) (Corregido)

Sea f(t) el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2 + 20t & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{90t - 240}{t + 4} & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

a) (0'5 puntos) ¿Evoluciona la función f de forma continua?

b) (0'5 puntos) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

c) (1 punto) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?

d) (0'5 puntos) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

Solución

Sea f(t) el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2 + 20t & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ \dfrac{90t - 240}{t + 4} & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

a)

¿Evoluciona la función f de forma continua?

Me están pidiendo la continuidad de la función f.

La función $(-5/2)t^2 + 20t$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular lo es en el intervalo (0,6).

La función $\frac{90t - 240}{t + 4}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en todo R – {4} (número que anula el denominador), en particular lo es en el intervalo (6,+∞).

Veamos la continuidad de f en t = 6.

f(t) es continua en t = 6 si $f(6) = \lim_{x\to 6^-} f(t) = \lim_{x\to 6^+} f(t)$.

$$f(6) = \lim_{x\to 6^-} f(t) = \lim_{x\to 6^-}\left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right) = -\frac{5}{2}\cdot(6)^2 + 20\cdot(6) = 30.$$

$\lim_{x\to 6^+} f(t) = \lim_{x\to 6^+}\left(\frac{90t - 240}{t+4}\right) = \frac{90\cdot(6) - 240}{(6)+4} = 30.$, **como las tres expresiones son iguales la función f es continua en t = 6, luego f es continua en 0 ≤ t < + ∞, <u>por tanto f si evoluciona de forma continua</u>.**

b)

¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

Me están pidiendo f(2·12), porque es en el 2º año y la función está dada en meses.

Como t = 2·12 = 24 está en t > 6 , $f(t) = \frac{90t - 240}{t + 4}$, con lo cual $f(24) = \frac{90\cdot(24) - 240}{(24) + 4} = \frac{480}{7} \cong 68'57$, es decir **el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año (24 meses) es del 68’57%.**

c)

¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?

Me están pidiendo la solución de f(t) = 40.

Si 0 ≤ t ≤ 6, f(t) = $(-5/2)t^2 + 20t$ luego f(t) = 40 → $(-5/2)t^2 + 20t = 40$ → $-5t^2 + 40t = 80$ →

→ $-5t^2 + 40t - 80 = 0$ → $t^2 - 8t + 16 = 0$ → $t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$ = 4 (doble).

Si t > 6, $f(t) = \frac{90t - 240}{t + 4}$ luego f(t) = 40 → $\frac{90t - 240}{t + 4} = 40$ → 90t – 240 = 40·(t + 4) →

→ 90t – 240 = 40t + 160 → 50t = 400 → t = 400/50 = 8.

Luego el porcentaje de ocupación sería del 40% en el mes número 4 y en el mes número 8.

d)

¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

Me están pidiendo el límite de f(t) en + ∞, es decir su una asíntota horizontal en + ∞.

La recta y = b es una asíntota horizontal + ∞ de f si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = b$.

Como $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{90t - 240}{t + 4}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{90t - 240}{t + 4}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{90t}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty}(90) = 90$, **la recta y = 90 es una asíntota horizontal de f(t) en + ∞, por tanto <u>el porcentaje de ocupación no llegaría al 90% aunque estuviese abierto indefinidamente.</u>**

EJERCICIO 3 (A)

Se sabe que el 90% de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60% está interesado por sus notas y el 55% por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno está interesado por alguna de las dos cuestiones?

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.

c) (0’5 puntos) Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

Solución

Se sabe que el 90% de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60% está interesado por sus notas y el 55% por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a)
¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno está interesado por alguna de las dos cuestiones?
Sean los sucesos A = "estar interesado por las redes sociales" y B = "estar interesado por sus notas".

Nos dan p(A) = 90% = 0'9, p(B) = 60% = 0'6, p(estar interesado por ambas cuestiones) = $p(A\cap B)$ =
= 55% = 0'55.

Me están pidiendo **p(estar interesado por alguna de las dos cuestiones) = $p(A\cup B)$** =
= $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'9 + 0'6 – 0'55 **= 0'95 = 95% del alumnado.**
b)
Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.
Me están pidiendo **$p(B/A^C)$ =** $\dfrac{p\left(B\cap A^C\right)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p\left(A\cap B\right)}{1 - p(A)}$ = (0'6 – 0'55)/(1 – 0'9) **= 0'5 = 50% del alumnado**.
c)
Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

Me piden **p(noA y noB) = $p(A^C\cap B^C)$** = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A\cup B)$ =
= 1 – 0'95 **= 0'05 = 5% del alumnado**.

EJERCICIO 4 (A)
La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.
a) (1 puntos) ¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?
b) (1'5 puntos) Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se le mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

Solución

La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.
a)
¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?

Sabemos, por el Teorema Central del límite, que si una variable aleatoria X sigue una normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ es la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, entonces la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, donde n es el tamaño de la muestra y $\mu = \overline{x}$.

Si X no siguiese una normal pero n ≥ 30, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ si sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

En nuestro caso la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(165, \frac{10}{\sqrt{25}}) = N(165,2)$.

b)
Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se le mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

Hemos visto en el apartado (a) que la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal N(165,2).

Me están pidiendo **$p(\overline{X} > 160)$ =** { tipifico $Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } = $p(Z > \frac{160 - 165}{2}) = p(Z > -2'5)$ =
= 1 - p(Z ≤ -2'5) = 1 - [1 - p(Z ≤ 2'5)] = p(Z ≤ 2'5) = {mirando en las tablas de la N(0,1) } **= 0'9938**.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)
(2'5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa,

tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 € ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Solución

Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 € ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Es un problema de programación lineal.

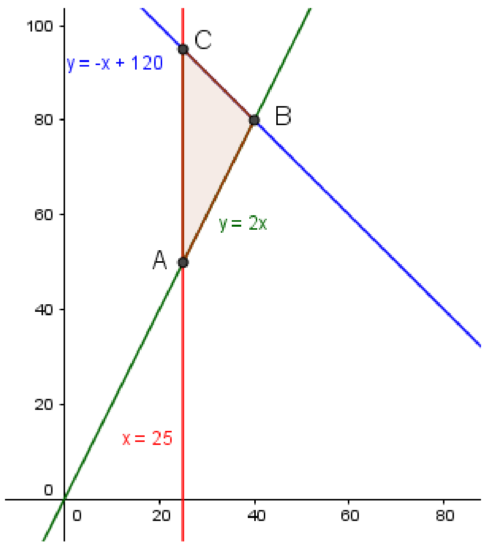
Sea x = nº de empresas.
Sea y = nº de particulares.

De “Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes” → $x \geq 25$.
De “el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas” → $y \geq 2x$.
De “tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales” → $x + y \leq 120$.
De “Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €”, tenemos que la función a optimizar es $F(x,y) = 386x + 229y$.

Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 386x + 229y$.
Restricciones: $x \geq 25$; $y \geq 2x$; $x + y \leq 120$.

Las desigualdades $x \geq 25$**;** $y \geq 2x$**;** $x + y \leq 120$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x = 25$; $y = 2x$; $x + y = 120$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
$x = 25$; $y = 2x$; $y = 120 - x$.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B y C de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 25$ e $y = 2x$, tenemos $y = 2\cdot(25) = 50$ y el vértice es A(25,50).
De $y = 2x$ e $y = 120 - x$, tenemos $2x = 120 - x \rightarrow 3x = 120 \rightarrow x = 120/3 = 40$, con lo cual $y = 2\cdot(40) = 80$ y el vértice es B(40,80).
De $y = 120 - x$ y $x = 25$, tenemos $y = 120 – (25) = 95$, y el vértice es C(25,95).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(25,50), B(40,80) y C(25,95).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 386x + 229y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(25,50), B(40,80) y C(25,95). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(25,50) = 386(25) + 229(50) = 21100$; $\mathbf{F_B(40,80) =}$ $386(40) + 229(80)$ $\mathbf{= 33760}$;
$F_C(25,95) = 386(25) + 229(95) = 31405$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 33760** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(40,80),** es decir **el beneficio máximo es de 33760€ y se alcanza teniendo en la cartera 40 empresas y 80 particulares.**

EJERCICIO 2 (B) (Corregido)

a) (1'5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = \dfrac{e^{5x} - x}{x^2 - x}$, $g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$.

b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa x = 1.

Solución

a)

Calcule la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = \dfrac{e^{5x} - x}{x^2 - x}$, $g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$.

Sabemos que $(f + g)' = f' + g'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{(g)^2}$; $(a \cdot f)' = a \cdot f'$; $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$;

$\left(e^f\right)' = e^f \cdot f'$; $(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$; $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$

$$f(x) = \frac{e^{5x} - x}{x^2 - x};\quad f'(x) = \frac{(e^{5x} - x)' \cdot (x^2 - x) - (e^{5x} - x) \cdot (x^2 - x)'}{(x^2 - x)^2} = \frac{(e^{5x} \cdot 5 - 1) \cdot (x^2 - x) - (e^{5x} - x) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)^2}.$$

$g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$; $g'(x) = [(2x^2 - x)^3]' \cdot \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x)^3 \cdot [\ln(x^3 + 2)]' =$

$= [3 \cdot (2x^2 - x)^2 \cdot (4x - 1)] \cdot \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x)^3 \cdot \left[\dfrac{3x^2}{x^3 + 2}\right]$

b)

Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa x= 1.

La recta tangente en x = 1 es $y - h(1) = h'(1) \cdot (x - 1)$

$h(x) = \dfrac{1}{x} \to h(1) = \dfrac{1}{1} = 1$. $h'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \to h'(1) = \dfrac{-1}{1^2} = -1$.

La recta tangente en x = 1 es $\mathbf{y - (1) = (-1) \cdot (x - 1)}$, de donde $\mathbf{y = -x + 2}$.

EJERCICIO 3 (B) (Corregido)

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.
a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?
b) (1 punto) Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

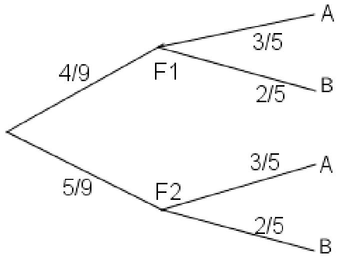
Solución

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

Datos del problema: Las dos fábricas producen 45000 kg y la F1 20000 kg luego p(F1) = 20/45 = 4/9; p(A/F1) = 12000/20000 = 3/5; p(A/F2) = 15000/25000 = 3/5, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

p(B) = p(F1).p(B/F1) + p(F2).p(B/F2) = (4/9)·(2/5) + (5/9)·(2/5) **= 2/5 = 0'4**.

b)
Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(F1/A) =} \frac{p(F1 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(F1).p(A/F1)}{1 - p(B)} = \frac{(4/9)\cdot(3/5)}{1 - 2/5} \mathbf{= 4/9 \cong 0'44444}.$$

$$\mathbf{p(F2/A) =} \frac{p(F2 \cap A)}{p(A)} = \frac{p(F2).p(A/F2)}{1 - p(B)} = \frac{(5/9)\cdot(3/5)}{1 - 2/5} \mathbf{= 5/9 \cong 0'55556}.$$

Es más probable que el paquete elegido proceda de la fábrica F2, pues la probabilidad es mayor.

Este problema es más sencillo realizarlo por una tabla de contingencia.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	F1	F2	Total
A	12000	15000	
B			
Total	20000	25000	

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	F1	F2	Total
A	12000	15000	**27000**
B	**8000**	**10000**	**18000**
Total	20000	25000	**45000**

a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

$$\mathbf{p(B)} = p(A \cap Ac) = \frac{\text{Total kg del tipo B}}{\text{Total kg de ambas fábricas}} = 18000/45000 \mathbf{= 2/5 = 0'4}.$$

b)
Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

$$\mathbf{p(F1/A)} = \frac{\text{Total kg de A de F1}}{\text{Total kg de A}} = 12000/27000 \mathbf{= 4/9 \cong 0'444444.}$$

p(F2/A) = $\frac{\text{Total kg de A de F2}}{\text{Total kg de A}}$ = 15000/27000 **= 5/9 ≅ 0'555556.**

<u>Es más probable que el paquete elegido proceda de la fábrica F2</u>, puesto que la probabilidad es mayor.

EJERCICIO 4 (B) (Corregido)

La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

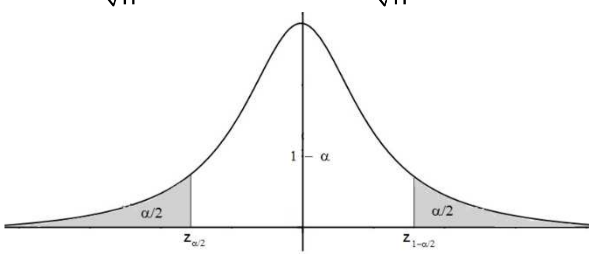
a) (1'25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 95%, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

b) (1'25 puntos) Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0'5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

Solución

La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

Sabemos que para la media poblacional μ, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

a)

Calcule un intervalo de confianza, al 95%, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

Datos del problema: σ = 6, n = 64; $\overline{x}$ = 35; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene y corresponden al punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(35 - 1'96\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}, 35 + 1'96\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}\right) = \textbf{(33'53,36'47)}$$

b)

Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0'5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: Error = E ≤ 0'5, σ = 6, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir α/2 = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2’57 + 2’58)/2 = 2’575.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{2'575 \cdot 6}{0'5}\right)^2$ = 954’81, es decir **el tamaño mínimo es de n = 955 participantes.**