OPCIÓN A

18_mod1_jun_EJERCICIO 1 (A)

a) (1 punto) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar.
"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) (1'5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$x \ge 0 \qquad x \le 2y + 2 \qquad x + y \le 5$

Calcule el máximo de F(x,y) = 4x + 3y en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

Solución

a)
Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar.
"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de kilos de maíz.
Sea y = nº de kilos de pienso.

	Hidratos de Carbono	Proteínas	Precio
Maíz	600	200	0'5 € / kg
Pienso	300	600	0'25 € / kg
Mínimo	1800	2400	

De "1 kg de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y de1 kg de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y de cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono"
$\rightarrow 600x + 300y \ge 1800$.

De " 1 kg de maíz aporta 200 g de proteínas y de 1 kg de pienso aporta 600 g de proteínas y de cada oveja necesita diariamente como mínimo 2400 g de proteínas" $\rightarrow 200x + 600y \ge 2400$.

De "se necesita algún kilogramo de maíz y algún kilogramo de pienso" $\rightarrow x \ge 0; \quad y \ge 0$.

De "si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, tenemos que la función a optimizar es F(x,y) = 0'50x + 0'25y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 0'50x + 0'25y.
Restricciones: $600x + 300y \ge 1800$; $200x + 600y \ge 2400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

b)
Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

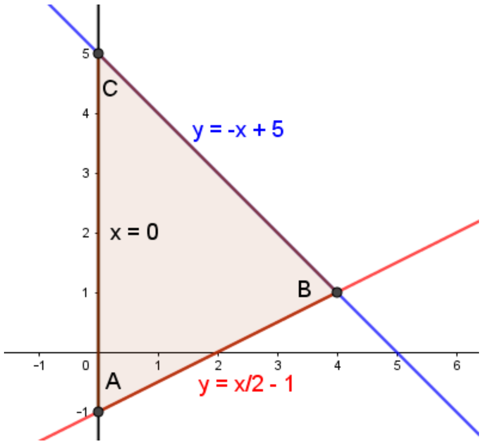
$\mathbf{x \ge 0 \qquad x \le 2y + 2 \qquad x + y \le 5}$

Calcule el máximo de **F(x,y) = 4x + 3y** en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

Las desigualdades $x \ge 0$; $x \le 2y + 2$; $x + y \le 5$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas yason rectas, $x = 0$; $x = 2y + 2$; $x + y = 5$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$x = 0$; $y = x/2 - 1$; $y = -x + 5$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B y C de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = x/2 - 1$, tenemos $y = -1$ y el vértice es A(0,-1).
De $y = x/2 - 1$ e $y = -x + 5$, tenemos $x/2 - 1= -x + 5 \rightarrow x - 2 = -2x + 10 \rightarrow 3x = 12$, con lo cual x=4 e y=1, y el vértice es B(4,1).
De $x = 0$ e $y = -x + 5$, tenemos $y = 5$, y el vértice es C(0,5).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,1), B(4,1) y C(0,5).

Veamos el máximo de la función $F(x,y) = 4x + 3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,1), B(4,1) y C(0,5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,-1) = 4(0) + 3(-1) = -3$; $\mathbf{F_B(4,1)} = 4(4) + 3(1) = \mathbf{19}$; $F_C(0,5) = 4(0) + 3(5) = 15$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 19** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(4,1).**

18_mod1_jun_EJERCICIO 2 (A)

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión $f(x) = 40 – 6x + x^2$, para $x \geq 0$ donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.
a) (1 punto) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.
b) (0'8 puntos) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?
c) (0'7 puntos) Represente gráficamente la función.

Solución

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión $f(x) = 40 – 6x + x^2$, para $x \geq 0$ donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.
a)
¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

Me están pidiendo la monotonía de la función f para $x \geq 0$, y de paso su mínimo.

Calculamos $f'(x)$ y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

Tenemos $f(x) = 40 – 6x + x^2$; $f'(x) = – 6 + 2x$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow – 6 + 2x = 0$, de donde $x = 3$ (que será el posible extremo relativo).

Como f '(1) = – 6 + 2(1) = - 4 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0,3).

Como f '(4) = – 6 + 2(4) = 2 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (3,+∞).

Por definición x = 3 es un mínimo relativo y vale $f(3) = 40 – 6(3) + (3)^2 = 31$; es decir **el coste disminuye con 0 ≤ x ≤ 3, y para x = 3 artículos el coste es mínimo y vale f(3) = 31**.

b)

¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?

Me están pidiendo la solución de f(0) y también f(x) = 80, con sus soluciones.

De $f(0) = 40 – 6(0) + (0)^2 = 40$, luego **si no se produce ningún artículo el coste es de 40.**

f(x) = 80, tenemos $40 – 6x + x^2 = 80$, de donde $x^2 – 6x – 40 = 0 \rightarrow$

$x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \dfrac{6 \pm 14}{2}$, por tanto x = 10 y x = -4. La única solución valida es x = 10, es decir **si el coste es de 80, se producen 10 artículos.**

c)

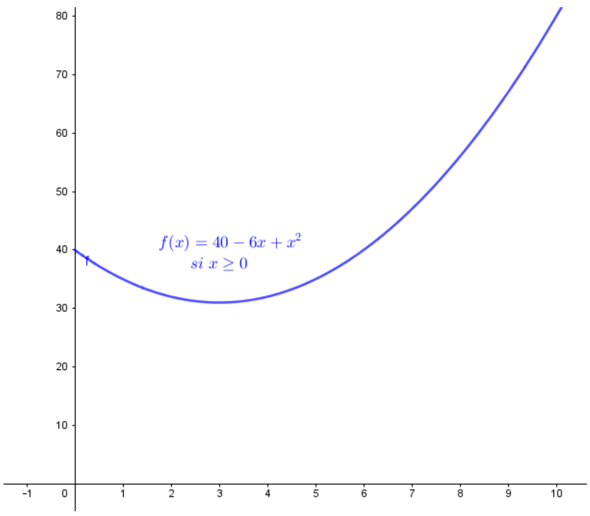
Represente gráficamente la función.

Si x ≥ 0, $f(x) = 40 – 6x + x^2$, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba ∪, porque el número que multiplica a x^2 es positivo (a = 1).

Calculamos su vértice, es un mínimo, por la forma de la parábola, lo hemos calculado antes: V(3,31). Por esta razón f no tiene cortes con abscisas, y el corte con ordenadas ya lo hemos calculado (0,40).

Sólo necesitamos otro punto el (4, f(4)) = (4, 32).

Un esbozo de la gráfica es:



He modificado la escala del eje OY.

18_mod1_jun_EJERCICIO 3 (A)

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) (1'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) (0'75 puntos) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

Solución

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

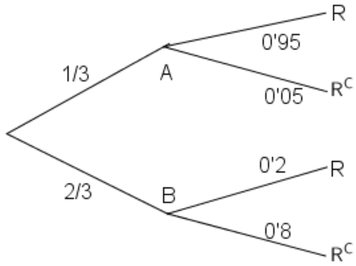
a)

¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

Llamemos A, B, R y R^C, a los sucesos siguientes, "ser residente del centro", "ser residente de la periferia", "restringir el acceso de vehículos " y "no restringir el acceso de vehículos ", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 5000/15000 = 1/3; p(B) = 10000/15000 = 2/3; p(R/A) = 95% = 0'95 ; p(R/B) =
= 20% = 0'2, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

Me piden **p(R) =** p(A).p(R/A) + p(B).p(R/B) = (1/3)·(0'95) + (2/3)·(0'2) **= 9/20 = 0'45**.

b)

¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

Me piden **p(A∩R) =** p(A).p(R/A) = (1/3)·(0'95) **= 19/60** ≅ **0'31667**.

c)

Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

Me piden **p(A/R)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/R) =} \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A).p(R/A)}{p(R)} = \frac{19/60}{0'45} \mathbf{= 19/27 \cong 0'7037}.$$

Este problema se puede realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Centro = A	Periferia = B	Total
R	95% de 5000 = 4750	20% de 10000 = 2000	
R^C			
Total	5000	10000	

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Centro = A	Periferia = B	Total
R	4750	2000	**6750**
R^C	**250**	**8000**	
Total	5000	10000	**15000**

a)

¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

Me piden **p(R)** = $\frac{\text{Total personas quieren se restrinja el acceso}}{\text{Total personas Centro y Periferia}}$ = **6750/15000 = 9/20 = 0'45**.

b)
¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

Me piden **p(A∩R)** = $\frac{\text{Total personas quieren restrinjir y del Centro}}{\text{Total personas del Centro y Periferia}}$ = **4750/15000 = 19/60 ≅ 0'31667**.

c)
Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

Me piden **p(A/R)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/R)} = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{19/60}{0'45} = \mathbf{19/27 \cong 0'7037}.$$

18_mod1_jun_EJERCICIO 4 (A)

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.
a) (1'25 puntos) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.
b) (1'25 puntos) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales

Solución

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.
a)
Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 16 muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras de tamaño 2	**1 1**	**1 2**	**1 3**	**1 4**	**2 1**	**2 2**	**2 3**	**2 4**	**3 1**	**3 2**	**3 3**	**3 4**	**4 1**	**4 2**	**4 3**	**4 4**
Media de la muestra $\overline{x}_i$	1	1'5	2	2'5	1'5	2	2'5	3	2	2'5	3	3'5	2'5	3	3'5	4

b)
Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales

La media poblacional es μ = (1 + 2 + 3 + 4)/4 = 5/2 = **2'5.**

La varianza poblacional es $\sigma^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{(1 - 2'5)^2 + (2 - 2'5)^2 + (3 - 2'5)^2 + (4 - 2'5)^2}{4}$ **= 5/4 = 1'25**

El Teorema Central del Límite nos afirma que la media muestral coincide con la media poblacional, es decir **μ =** $\overline{x}$, y que la varianza de la distribución muestral de medias σ_x^2 coincide con la varianza de la de la población σ^2 dividida por el tamaño de la muestra **n**, es decir $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$.

En nuestro caso la media muestral es $\overline{x}$ **= μ =2'5**, y la varianza de las medias muestrales $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$ =
= (5/4)/2 = **5/8 = 0'625.**

También se podría hacer estudiando la distribución muestral de medias, como puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot (x_i)^2$
1	1	1	1
1'5	2	3	4'5
2	3	6	12
2'5	4	10	25
3	3	9	27
3'5	2	7	24'5
4	1	4	16
∑	**N = 16**	**40**	**110**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{40}{16}$ **= 2'5**, que coincide con la media de la población μ **= 2'5**

La varianza de la distribución muestral de medias es: $\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{110}{16} - (2'5)^2$**= 5/8**, que coincide con la varianza de la de la población σ^2, dividida por el tamaño de la muestra **n**; es decir $\sigma_{\overline{x}}^2 = \sigma^2/n$ =
= (5/4)/2 = 5/8.

OPCION B

18_mod1_jun_EJERCICIO 1 (B)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1'2 puntos) ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$?
b) (1'3 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A = 2B^t + I_2$.

Solución

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a)
¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$?

En general la igualdad matricial $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$ suele ser falsa porque $A\cdot B \neq B\cdot A$, es decir el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa. No obstante, vamos a comprobarlo en este caso particular.

$$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(A)^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad (B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2A\cdot B = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(A)^2 + (B)^2 + 2\cdot A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

En este caso particular tampoco se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$, porque $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

b)
Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A = 2B^t + I_2$.

Dada la matriz A, si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (A|I) a (I|D), la matriz D es la inversa de A, es decir $D = A^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1\cdot(-1) \\ F_2/2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) = (I|A^{-1}), \text{ luego } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Veámoslo por la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2; \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Luego sale lo mismo.

Multiplicando la expresión $X\cdot A = 2B^t + I_2$, por la derecha por A^{-1} tenemos $X\cdot A\cdot A^{-1} = (2B^t + I_2)\cdot A^{-1}$, de donde $X\cdot I_2 = (2B^t + I_2)\cdot A^{-1}$, es decir $\mathbf{X = (2B^t + I_2)\cdot A^{-1}}$.

$2B^t + I_2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Luego **X = (2B^t + I$_2$.)· A^{-1} =** $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -2-1/2 & -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

18_mod1_jun_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx + \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) (1'5 puntos) Calcule los valores de "a" y "b" para que la función sea continua y derivable ex x = 1.
b) (1 punto) Para b = 3, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa x = 2.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx + \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a)
Calcule los valores de "a" y "b" para que la función sea continua y derivable ex x = 1.

Como es continua en x = 1 tenemos $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$f(1) = b(1) + 2/(1) = b + 2$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 + ax^2) = (1)^3 + a(1)^2 = 1 + a$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (bx + 2/x) = b(1) + 2/(1) = b + 2$.

Igualando tenemos $b + 2 = 1 + a$.

Como es derivable en todo R, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & \text{si} \quad x < 1, \\ b - \dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Al ser derivable en x = 1, tenemos que $f'(1^+) = f'(1^-)$. Estudiamos la continuidad de la derivada.

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x^2 + 2ax) = 3(1)^2 + 2a(1) = 3 + 2a$.
$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (b - 2/x^2) = b - 2/(1)^2 = b - 2$.

Igualando tenemos $3 + 2a = b - 2$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} b + 2 = 1 + a \\ 3 + 2a = b - 2 \end{cases} \approx \begin{cases} b - a = -1 \\ 2a - b = -5 \end{cases}$, sumando $\approx \begin{cases} b - a = -1 \\ \quad a = -6 \end{cases}$, es decir a= -6 y b-(-6) = -1, es decir **a = - 6 y b = -7**.

b)
Para b=3, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa x=2.

Vemos que x = 2 está en la rama $f(x) = bx + 2/x = 3x + 2/x$, con lo cual $f'(x) = 3 - 2/x^2$.

La recta tangente en x = 2 es "$y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2)$"

De $f(x) = 3x + 2/x$, tenemos $\mathbf{f(2)} = 3(2) + 2/(2) = 6 + 1 \mathbf{= 7}$.
De $f'(x) = 3 - 2/x^2$, tenemos $\mathbf{f'(2)} = 3 - 2/(2)^2 = 3 - 1/2 = \mathbf{5/2 = 2'5}$.

Luego la recta tangente en x = 2 es **y - 7 = (5/2)·(x - 2) ó y = (5/2)·x + 2 ó 5x - 2y + 4.**

18_mod1_jun_EJERCICIO 3 (B)

Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidos en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando protegidas solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.
a) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?
b) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) (1 punto) Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuáles la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

Solución

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Sombra	Sol	Total
A	1350		1500
B	80% de 1000 (800)		1000
C	250		500
Total			3000

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Sombra	**Sol**	**Total**
A	1350	**150**	1500
B	80% de 1000 (800)	**200**	1000
C	250	**250**	500
Total	**2400**	**600**	3000

a)
¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

Piden **p(A∪B)** = $\dfrac{\text{Total plazas de A y de B}}{\text{Total plazas de aparcamiento}}$ = (1500 + 1000)/3000 **= 5/6 = 0’4**.

b)
¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

Piden **p(Sol)** = $\dfrac{\text{Total de plazas al Sol}}{\text{Total plazas de aparcamiento}}$ = (600)/3000 **= 1/5**.

c)
Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuáles la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

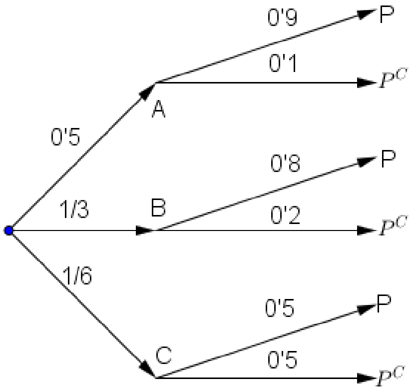
Piden **p(B/Sol)** = $\dfrac{\text{Total de plazas de Sombra y B}}{\text{Total plazas de Sombra}}$ = 800/2400 **= 1/3.**

Se podría hacer también mediante un diagrama de árbol.

Llamemos A, B, C, P y P^C, a los sucesos siguientes, “zona A”, “zona B”, “zona C”, "protegido del sol " y " protegido del sol", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 1500/3000 = 1/2 = 0’5; p(B) = 1000/3000 = 1/3; p(C) = 500/3000 = 1/6; p(P/A) = = 1350/1500 = 0’9 ; p(P/B) = 80% = 0’8, p(P/C) = 250/500 = 1/2 = 0’5, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

Piden **p(A∪B)** = p(A) + p(B) = 1/2 + 1/3 **= 5/6 = 0'4**.
b)
¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(P^C)** = p(A).p(P^C/A) + p(B).p(P^C/B) + p(C).p(P^C/C) =
= (0'5)·(0'1) + (1/3)·(0'2) + (1/6)·(0'5) **= 1/5 = 0'2**.
c)
Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuáles la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

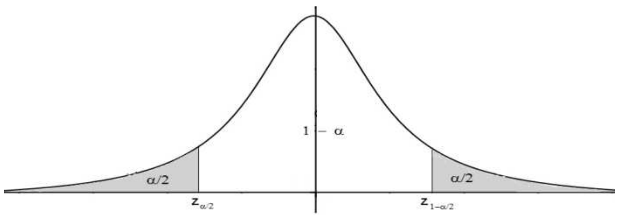
Me piden **p(B/P)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/P) =} \frac{p(BÇP)}{p(R)} = \frac{p(B)\cdot p(P/B)}{1 - p(P^C)} = \frac{(1/3)\cdot 0'8}{1 - 0'2} \mathbf{= 1/3 \cong 0'7037}.$$

18_mod1_jun_EJERCICIO 4 (B)
En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediantes muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social
b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E =
$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b - a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ =
= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$ =
$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediantes muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.
a)
Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social

Datos del problema: n = 500, $\hat{p} = \frac{380}{500}$ = 0’76, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 – 0’76 = 0’24, nivel de confianza =97% = 0’97 = = 1 - α, de donde α = 0’03, con la cual α/2 = (0’03)/2 = 0’015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’015 = 0’985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 si viene y corresponde a 2’17, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17, por tanto el intervalo de confianza pedido es::

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'76 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'76\cdot 0'24}{500}}, 0'76 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'76\cdot 0'24}{500}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'71855; 0'80145)}$$

b)
Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’76, $\hat{q}$ = 0’24, error = E ≤ 2% = 0’02, nivel de confianza = 96% = 0’96 = 1 - α, de donde α = 0’04, con la cual α/2 = 0’04/2 = 0’02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’02 = 0’98, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0’98 no viene, y que la probabilidad 0’9798 corresponde a 2’05 y 0’9803 corresponde a 2’06, se podría considerar para 0’98 su punto medio que sería $z_{1-\alpha/2}$ = 2’055 (*si hacemos la interpolación entre los valores 0’9798 y 0’9803 nos saldría $z_{1-\alpha/2}$ = 2’054, y si tomamos la más próxima es 0’9798, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’05*), por tanto:

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'055)^2\cdot 0'76\cdot 0'24}{(0'02)^2}$ = 1925’6994, por tanto **el tamaño mínimo de estudiantes que sería preciso entrevistar es de n = 1926.**