PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix} \; ; \; C=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que: $A^2X-BA+X=CD$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2X-BA+X=CD \Rightarrow A^2X+X=CD+BA \Rightarrow (A^2+I)X=CD+BA \Rightarrow X=(A^2+I)^{-1}(CD+BA)$$

Calculamos A^2+I

$$A^2+I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\cdot I$$

Calculamos $(A^2+I)^{-1}=(2\cdot I)^{-1}=2^{-1}\cdot I^{-1}=\frac{1}{2}\cdot I$

Luego:

$$X=(A^2+I)^{-1}(CD+BA)=\frac{1}{2}\cdot I\cdot(CD+BA)=\frac{1}{2}\cdot(CD+BA)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\\ -8 & 10 & -12\\ 12 & -15 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4 & 4\\ -9 & 9 & -12\\ 13 & -13 & 16\end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{2018}**.**

b) Determina, si existe, la matriz X **que verifica** $A(X+2I)=BC$ **donde** I **es la matriz identidad.**

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos: $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^{2018}=\begin{pmatrix}1&2018&2018\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A\cdot(X+2I)=BC\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(X+2I)=A^{-1}\cdot B\cdot C\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot C-2I$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot C-2I=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&-1&2\\-1&-1&-4\end{pmatrix}$$

Considera la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$**. Sabiendo que el determinante de** M **es 2, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:**

a) El determinante de la matriz $5M^4$**; b)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$**; c)** $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $\left|k\cdot A_n\right|=k^n\cdot|A|$ y que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, luego:

$$\left|5M^4\right|=|5M\cdot M\cdot M\cdot M|=|5M||M|\cdot|M|\cdot|M|=5^3|M|\cdot|M|\cdot|M|\cdot|M|=5^3\cdot 2^2=2000$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 2=-\frac{2}{3}$

Propiedades aplicadas

- Si en un determinante se intercambian dos líneas, el determinante cambia de signo
- Para multiplicar un determinante por un número basta con multiplicar una línea.

c) $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix}=0+\begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix}=2$

Propiedades aplicadas

- Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.
- Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.
- El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la inversa de A.

b) Determina los valores de m tales que $(A-mI)$ tiene inversa (I es la matriz identidad).

c) Calcula el rango de $(A-2I)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow \text{ Si tiene inversa}$$

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz $A-mI=\begin{pmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix}=-m^3+5m^2-8m+4=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=2$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m\neq 1\ y\ 2$

c) Calculamos el rango de $A-2I$:

$$A-2I=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A-2I)=2$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de *a, b* y *c* para que las matrices *A* y *B* conmutan.

b) Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}**.**

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si conmutan, se tiene que cumplir que $A\cdot B = B\cdot A$, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow a=b=0; c=-1$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot I=A$$

$$A^{2017}=A^{2016}\cdot A=\left(A^2\right)^{1008}\cdot A=\left(I\right)^{1008}\cdot A=A$$

$$A^{2018}=\left(A^2\right)^{1009}=\left(I\right)^{1009}=I$$

c) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A\cdot A=I\Rightarrow A=A^{-1}$