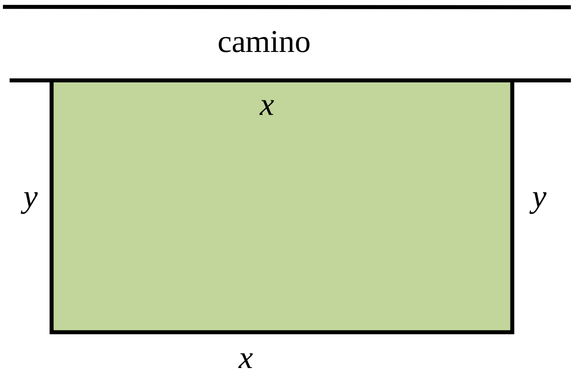
Examen Resuelto por **D. Juan Antonio González Mota**, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

Opción A

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

Solución.



Suponiendo que las dimensiones del cercado rectangular sean x m de largo por y m de ancho, la superficie cercada será:

$$S(x,y) = x \cdot y \quad \text{(función a optimizar)}$$

Teniendo en cuenta los precios del cercado, el importe de la cerca será

$$80x + 10x + 2\cdot 10y = 28\,800 \;\rightarrow\; 90x + 20y = 28\,800 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 9x + 2y = 2\,880$$

que será la ligadura entre las dos variables.

Despejando una de ellas en esta ligadura y sustituyendo en la función a optimizar nos queda:

$$9x + 2y = 2\,880 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}\cdot(2880 - 9x)$$

$$S(x,y) = x\cdot y \;\rightarrow\; S(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot(2880-9x) \;\rightarrow\; S(x) = \frac{1}{2}\cdot(2880x - 9x^2)$$

Derivando esta expresión nos queda:

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot(2880x-9x^2) \;\rightarrow\; S'(x) = \frac{1}{2}\cdot(2880 - 9\cdot 2x) \;\rightarrow\; S'(x) = 1440 - 9x$$

Para obtener los puntos donde la función $S(x)$ tiene sus extremos anulamos su derivada:

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1440 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1440}{9} = 160$$

y para este valor

$$S'(x) = 1440 - 9x \;\rightarrow\; S''(x) = -9 \;\rightarrow\; S''(160) = -9 < 0 \;\rightarrow\; \text{la función tiene un máximo.}$$

En consecuencia, las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 28 800 euros serán $x = 160\ m.$ e $y = \frac{1}{2}\cdot(2880 - 9\cdot 160) = 720\ m.$

Examen Resuelto por **D. Juan Antonio González Mota**, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

Ejercicio 2.- [**2'5 puntos**] Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ (Sugerencia: $\sqrt{x+2}=t$).

Solución

Realizando el cambio de variable sugerido tendremos:

$$\sqrt{x+2}=t \quad \to \quad x+2=t^2 \quad \to \quad x=t^2-2 \quad \to \quad dx=2t\,dt$$

Con lo que nuestra integral nos queda de la forma:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2t\,dt}{((t^2-2)-2)\cdot t} = \int \frac{2\,dt}{(t^2-4)}$$

Que es una integral racional con el grado del numerador menor que el grado del denominador y, por tanto, podemos aplicar el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador son $t=2$ y $t=-2$ nos queda la siguiente suma:

$$\frac{2}{t^2-4} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t-2)}{(t-2)(t+2)}$$

Como los denominadores de las fracciones son iguales, podemos igualar los numeradores:

$2 = A(t+2)+B(t-2)$

Dando valores a la variable obtenemos los valores de los parámetros:

$$Si \quad t=2: \quad 2=A(2+2)+B(2-2) \quad \to \quad 4A=2 \quad \to \quad A=\frac{1}{2}$$

$$Si \quad t=-2: \quad 2=A(-2+2)+B(-2-2) \quad \to \quad -4B=2 \quad \to \quad B=-\frac{1}{2}$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2\,dt}{(t^2-4)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-2} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2| \right) + k$$

Y deshaciendo el cambio de variable inicial nos queda:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2\,dt}{(t^2-4)} = \frac{1}{2}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2| \right) + k = \frac{1}{2}\left(\ln|\sqrt{x+2}-2| - \ln|\sqrt{x+2}+2| \right) + k$$

Examen Resuelto por **D. Juan Antonio González Mota**, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

Ejercicio 3.- [**2'5 puntos**] Halla la matriz X que verifica la igualdad $AXA^{-1}+B=CA^{-1}$ sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución

Despejamos la matriz X sumando la opuesta de la matriz B y multiplicando por la izquierda por la matriz inversa de A y por la derecha por la matriz A. Tendremos:

$$AXA^{-1}+B=CA^{-1} \;\rightarrow\; AXA^{-1}=CA^{-1}-B \;\rightarrow\; A^{-1}AXA^{-1}A=A^{-1}(CA^{-1}-B)A \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; I\cdot X\cdot I=A^{-1}CA^{-1}A-A^{-1}BA \;\rightarrow\; X=A^{-1}C-A^{-1}BA$$

Calculamos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A|=-1 \;\rightarrow\; \exists A^{-1}$$

Entonces

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y realizando los productos matriciales necesarios:

$$A^{-1}C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}BA=A^{-1}(BA)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$X=A^{-1}C-A^{-1}BA=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

---

que es la matriz pedida.

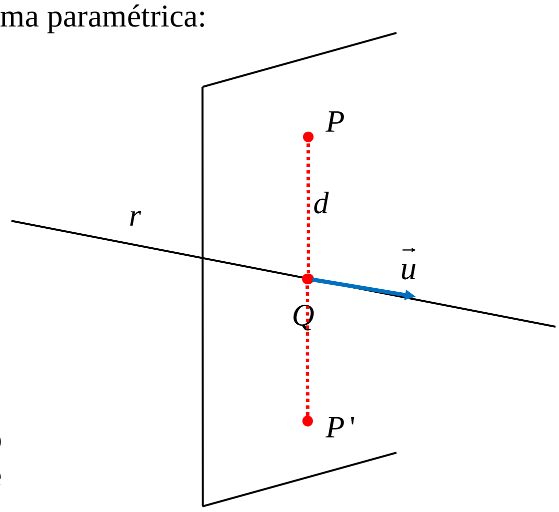
Ejercicio 4.- Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta r dada por $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$

a) **[1'25 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

b) **[1'25 puntos]** Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

a) Pasamos la ecuación cartesiana de la recta r a su forma paramétrica:



$$r:\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-5+2x \\ z=y+2=-3+2x \end{cases}$$

Haciendo $x=\lambda$ nos queda

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$$

Por tanto, su vector dirección es $\vec{u}=(1,2,2)$.

El plano perpendicular a la recta r tendrá como vector normal al vector dirección de r y además tiene que pasar por el punto P dado. Por tanto,

$$r\perp\pi \quad\rightarrow\quad \overrightarrow{u_r}=\vec{n}_\pi=(1,2,2) \quad\rightarrow\quad \pi\equiv x+2y+2z+D=0$$

Como $P(-3,1,6)\in\pi$: $\pi\equiv -3+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0 \quad\rightarrow\quad 11+D=0 \quad\rightarrow\quad D=-11$

y la ecuación del plano pedido nos queda de la forma

$$\pi\equiv x+2y+2z-11=0$$

b) Para calcular las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r calcularemos primeramente las coordenadas del punto Q intersección de la recta r y el plano perpendicular a ella que pasa por el punto P (lo hemos calculado en el punto anterior):

$$Q=r\cap\pi \quad\rightarrow\quad \begin{cases} r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases} \\ \pi\equiv x+2y+2z-11=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \lambda+2\cdot(-5+2\lambda)+2(-3+2\lambda)-11=0 \quad\rightarrow \\ \quad\rightarrow\quad 9\lambda-27=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=3 \quad\rightarrow\quad Q(3,1,3) \end{cases}$$

y las coordenadas de Q son $Q(3,1,3)$.

El punto Q es punto medio entre P y P', o también $\overrightarrow{PP'}=2\cdot\overrightarrow{PQ}$. Resolviendo esta última condición obtendremos las coordenadas del punto P' buscado.

De $\overrightarrow{PP'} = 2\cdot\overrightarrow{PQ}$ obtenemos $\quad \overrightarrow{p'} - \overrightarrow{p} = 2\cdot(\vec{q} - \overrightarrow{p}) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\cdot(\vec{q} - \overrightarrow{p}) \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad P' \equiv \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p} + 2\cdot(\vec{q} - \overrightarrow{p}) = 2\cdot\vec{q} - \overrightarrow{p} = 2\cdot(3,1,3) - (-3,1,6) = (9,1,0)$$

En consecuencia, el punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene por coordenadas $P' = (9,1,0)$.

Examen Resuelto por D. Juan Antonio González Mota, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina a y b sabiendo que $b>0$ y que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} a\cos(x)+2x & \text{si} \quad x<0 \\ a^2\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

es derivable. (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

Puesto que la función dada es derivable en $\mathbb{R}$, también tiene que ser derivable en el punto $x=0$ y para ser derivable tiene que ser continua en él. Por tanto, se tendrá que verificar que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \quad\to\quad \lim_{x\to 0^-}(a\cos(x)+2x)=\lim_{x\to 1^+}\left(a^2\ln(x+1)+\frac{b}{x+1}\right) \quad\to\quad a=b$$

Por ser derivable en $x=0$: $f'(0^-)=f'(0^+)$. Tendremos:

$$f'(x)=\begin{cases} -a\,\text{sen}(x)+2 & \text{si} \quad x<0 \\ a^2\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-a\,\text{sen}(x)+2)=2 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 1^{+-}}\left(\dfrac{a^2}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2}\right)=a^2-b \end{cases} \to a^2-b=2$$

Con estas dos condiciones formamos un sistema y resolviéndolo tendremos

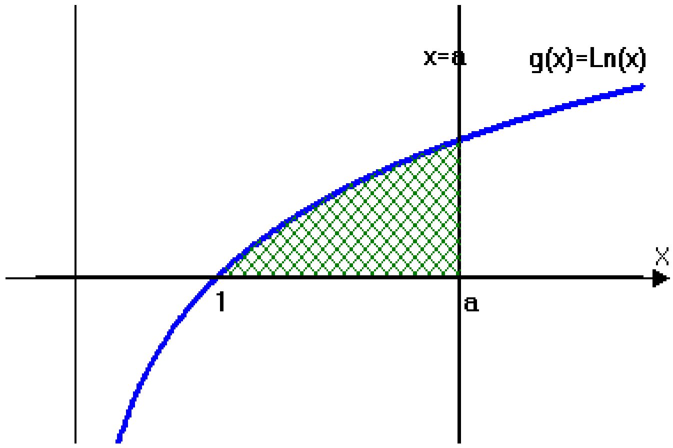
$$\left.\begin{array}{r} a=b \\ a^2-b=2 \end{array}\right\} \to b^2-b=2 \to b^2-b-2=0 \to \begin{cases} b=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Como nos dices que $b>0$, entonces los valores pedidos serán: $a=b=2$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea g la función definida por $g(x)=\ln(x)$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a>1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x=a$ es 1.

Solución

Consideremos la gráfica de la función logaritmo neperiano y la recta $x=a$ con $a>1$. El recinto limitado por ambas gráficas y el eje de abscisas será el sombreado en la figura adjunta:



El área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = \text{Ln}(x)$, el eje OX y la recta $x = a$ nos vendrá dada por

$$\text{Área del recinto:} \quad A = \int_1^a \text{Ln}(x) \cdot dx$$

Para resolver esta integral tendremos que recurrir al método de partes: hacemos

$$u = \text{Ln}(x) \quad \to \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx$$
$$dv = dx \quad \to \quad v = x$$

y, aplicando la fórmula de partes, obtenemos

$$A(R) = \int_1^a \text{Ln}(x) \cdot dx = [\ x \cdot \text{Ln}(x)\ ]_1^a - \int_1^a x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = [\ x \cdot \text{Ln}(x)\ ]_1^a - \int_1^a dx = [\ x \cdot \text{Ln}(x)\ ]_1^a - [x]_1^a =$$

$$= [\ x \cdot \text{Ln}(x) - x\ ]_1^a = (a \cdot \text{Ln(a)} - a) - (1 \cdot \text{Ln}(1) - 1) = a \cdot \text{Ln(a)} - a + 1$$

Como nos dicen que esta área es 1, $A(R) = 1$, entonces

$$a \cdot \text{Ln(a)} - a + 1 = 1 \quad \to \quad a \cdot \text{Ln(a)} - a = 0 \quad \to \quad a(\text{Ln}(a) - 1) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} a = 0 \\ \text{Ln}(a) - 1 = 0 \quad \to \quad a = e \end{cases}$$

Como el valor de a pedido es $a > 1$, entonces el valor que nos piden será $a = e$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

a) **[1'75 puntos]** Discute el sistema según los valores de λ.

b) [**0'75 puntos**] Determina, si existen, los valores λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.

Solución

(a) El sistema dado es un sistema homogéneo, sistema compatible ya que siempre tendrá, por lo menos, la solución nula. Para que tenga más de una solución se tendrá que verificar que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas del sistema, con lo que el sistema sería compatible e indeterminado: $r(A) < 3$ (nº de incógnitas)

Examen Resuelto por **D. Juan Antonio González Mota**, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ \lambda & 2 & 2\\ \lambda & 2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ \lambda & 2 & 2\\ \lambda & 2 & 1\end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & 2 & 2\\ \lambda & 2 & 1\end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \lambda-2 & 0 & 2\\ \lambda-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda\cdot(\lambda-2)$$

Anulando este determinante, obtenemos la ecuación

$$|A|=0 \rightarrow \lambda\cdot(\lambda-2)=0 \rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=2\end{cases}$$

En consecuencia,

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 2$, $|A|\neq 0 \rightarrow r(A)=3 \rightarrow$ el sistema sería **COMPATIBLE Y DETERMINADO**, tendría solución única que sería la solución nula (todas las incógnitas valdrían cero).
- Si $m=0$, entonces

$$|A|=0 \rightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=2<3 \rightarrow \begin{cases}2y+2z=0\\ 2y+\ \ z=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\alpha\\ y=z=0\end{cases}$$

el sistema sería **COMPATIBLE Y INDETERMINADO**, tendría infinitas soluciones (más de una) y, por tanto, estos serían los valores pedidos.

- Si $m=2$,

$$|A|=0 \rightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=2<3 \rightarrow \begin{cases}2y+2z=0\\ 2y+\ \ z=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\alpha\\ y=z=0\end{cases}$$

el sistema sería **COMPATIBLE Y INDETERMINADO**, tendría infinitas soluciones (más de una) y, por tanto, estos serían los valores pedidos.

(b) Observando el apartado anterior vemos que $z=0$ en todas las soluciones posibles. Por tanto, no existe ninguna solución en la que $z\neq 0$ para cualquier valor del parámetro λ.

Ejercicio 4.- Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son los vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta $\begin{cases}2x+y=0\\ z=0\end{cases}$

a) [**1 punto**] Calcula las coordenadas de los posibles puntos *C* de *r* para que el triángulo *ABC* tenga un ángulo recto en el vértice *A*.

b) [**1'5 puntos**] Calcula las coordenadas de los posibles puntos *D* de *r* para que el triángulo *ABD* tenga un área igual a $\sqrt{2}$.

Solución

a) La ecuaciones paramétricas de la recta dada serán

$$r:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Haciendo } x=\lambda} \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

por lo que cualquier punto de esta recta tendrá por coordenadas $(\lambda, -2\lambda, 0)$.

Si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ serán perpendiculares y su producto escalar será igual a cero. Tendremos:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(2,1,3)-(0,1,1)=(2,0,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=(\lambda,-2\lambda,0)-(0,1,1)=(\lambda,-2\lambda-1,-1) \quad \text{ya que } C\in r$$

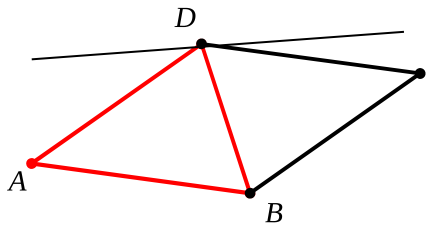
Como tienen que ser ortogonales:

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \;\rightarrow\; (2,0,2)\cdot(\lambda,-2\lambda-1,-1)=0 \;\rightarrow\; 2\lambda+0-2=0 \;\rightarrow\; \lambda=1$$

y el punto de la recta buscado tendrá por coordenadas $(1,-2,0)$.

b) Los puntos D que nos piden tendrán por coordenadas $(\lambda,-2\lambda,0)$ por pertenecer a la recta dada.

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto vectorial



"El módulo del vector producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo construido con base los dos vectores"

$$A_{\text{paralelogramo}}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

El Triángulo es la mitad del paralelogramo, por lo que

$$A_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

Tendremos:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(2,1,3)-(0,1,1)=(2,0,2) \qquad \overrightarrow{AD}=\vec{d}-\vec{a}=(\lambda,-2\lambda,0)-(0,1,1)=(\lambda,-2\lambda-1,-1)$$

Calculamos el producto vectorial de estos vectores:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ \lambda & -2\lambda-1 & -1 \end{vmatrix}=2(2\lambda+1)\,\vec{i}+2(\lambda+1)\,\vec{j}-2(2\lambda+1)\,\vec{k} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\left(2(2\lambda+1),\,2(\lambda+1),-2(2\lambda+1)\right)$$

Examen Resuelto por D. Juan Antonio González Mota, Profesor de Matemáticas Jubilado del Colegio Juan XIII Zaidín de Granada

y su módulo valdrá $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\left(2(2\lambda+1)\right)^2+\left(2(\lambda+1)\right)^2+\left(-2(2\lambda+1)\right)^2}=$

$$=2\sqrt{(2\lambda+1)^2+(\lambda+1)^2+(2\lambda+1)^2}=2\sqrt{2(4\lambda^2+4\lambda+1)+(\lambda^2+2\lambda+1)}=2\sqrt{9\lambda^2+10\lambda+3}$$

El área del triángulo *ABD* será:

$$A_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9\lambda^2+10\lambda+3}=\sqrt{9\lambda^2+10\lambda+3}$$

Como nos dicen que el área de este triángulo es $\sqrt{2}$, entonces $\sqrt{9\lambda^2+10\lambda+3}=\sqrt{2}$

Resolviendo la ecuación radical resultante obtenemos:

$$\sqrt{9\lambda^2+10\lambda+3}=\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad 9\lambda^2+10\lambda+3=2\quad\rightarrow\quad 9\lambda^2+10\lambda+1=0\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \lambda=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9}=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{18}=\frac{-10\pm 8}{18}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$$Si\quad \lambda=-1:\quad \sqrt{9(-1)^2+10\cdot(-1)+3}=\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad\sqrt{2}=\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad solución\ \ válida$$

$$Si\quad \lambda=-\frac{1}{9}:\quad \sqrt{9\left(-\frac{1}{9}\right)^2+10\left(-\frac{1}{9}\right)+3}=\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad\sqrt{2}=\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad solución\ \ válida$$

Al ser las dos soluciones válidas, tenemos dos puntos en la recta que cumplen la condición impuesta. Las coordenadas de estos puntos serán:

- Si $\lambda=-1\ \rightarrow\ D(-1,2,0)$
- Si $\lambda=-\frac{1}{9}\ \rightarrow\ D\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9},0\right)$