SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS MODELO 1 DEL 2015

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) (0'75 puntos) Efectúe la operación $A\cdot B^t$.
b) (0'75 puntos) Determine la matriz X tal que A + 2·X = B.
c) (1 punto) Halle la matriz Y tal que B·Y = $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a)
Efectúe la operación $A\cdot B^t$.

$A\cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$.

b)
Determine la matriz X tal que A + 2·X = B.

De A + 2·X = B, 2·X = B - A; X = (B - A)/2 = (1/2)·(B - A).

$X = (B - A)/2 = (1/2)\cdot(B - A) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c)
Halle la matriz Y tal que B·Y = $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Como det(B) = |B| = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 12 + 2 = 14 ≠ 0, existe su matriz inversa $B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t)$.

Multiplicando la expresión B·Y = $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, por B^{-1} por la izquierda tenemos:

$B^{-1}\cdot B\cdot Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow I\cdot Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}}$.

Calculamos la matriz inversa B^{-1}.

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, luego $\mathbf{B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t) = (1/14)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/14 & 2/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix} =}$

$\mathbf{=} \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}$

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(B|I_2)$, a la expresión $(I_2|C)$, donde $C = B^{-1}$.

$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1\text{-}3F_2 \\ \ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -14 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1\text{:}(-14) \\ \text{Cambio filas} \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/14 & 3/14 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1\text{- }4F_2 \\ \ \end{matrix} \approx$

$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/14 & 2/14 \\ 0 & 1 & -1/14 & 3/14 \end{array}\right)$, por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/14 & 2/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix} \mathbf{= (1/14)\cdot}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = (1/14)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = (1/14)\cdot\begin{pmatrix} 42 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}}$.

EJERCICIO 2 (A)

Una entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de euros, viene dada por la función $R(x) = -0'001x^2 + 0'5x + 2'5$ $\quad 1 \le x \le 500$, donde x es la cantidad de dinero invertida en miles de euros.
a) (1 punto) Determine qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad.
b) (0'5 puntos) ¿Qué rentabilidad se obtendría con dicha inversión?

c) (1 punto) ¿Cuál es la cantidad de dinero para la que se obtiene menor rentabilidad?

Solución

Una entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de euros, viene dada por la función $R(x) = -0'001x^2 + 0'5x + 2'5$ $1 \le x \le 500$, donde x es la cantidad de dinero invertida en miles de euros.

a) y b)

Determine qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad. ¿Qué rentabilidad se obtendría con dicha inversión?

Me están pidiendo el máximo absoluto, que se encontrará en los extremos del intervalo x = 1, x = 500, o entre las soluciones de R '(x) = 0.

De $R(x) = -0'001x^2 + 0'5x + 2'5$, $R'(x) = -0'002x + 0'5$

Si R '(x) = 0, tenemos $-0'002x + 0'5 = 0$, de donde $x = 0'5/0'002 = 250$.

Sustituimos los valores, 0, 250 y 500 en R(x) y el de mayor valor es el de máxima rentabilidad.

$R(1) = -0'001(1)^2 + 0'5(1) + 2'5 = 2'999$

$R(250) = -0'001(250)^2 + 0'5(250) + 2'5 = 65$

$R(500) = -0'001(500)^2 + 0'5(500) + 2'5 = 5/2 = 2'5$

El máximo absoluto es x = 250 y vale R(250) = 65, es decir la rentabilidad máxima es de 65000€ y se obtiene con una inversión de 250000€.

c)

¿Cuál es la cantidad de dinero para la que se obtiene menor rentabilidad?

Como hemos visto en el apartado a) y b), teníamos R(500) = 2'5, por tanto la menor rentabilidad es de 2500€ y se obtiene invirtiendo 500000€.

EJERCICIO 3 (A)

a) (1 punto) Un ilusionista tiene seis cartas: cuatro ases y dos reyes. Saca una carta, la enseña al público y, sin verla, la vuelve a mezclar con las demás. A continuación saca una segunda carta que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

b) (1'5 puntos) Si el ilusionista no devolviera la primera carta a la baraja y la segunda carta extraída fuera un as, ¿cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

Solución

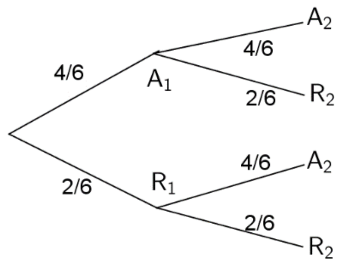
a)

Un ilusionista tiene seis cartas: cuatro ases y dos reyes. Saca una carta, la enseña al público y, sin verla, la vuelve a mezclar con las demás. A continuación saca una segunda carta que resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

Llamemos A^1, A^2, R^1 y R^2, a los sucesos siguientes, "sacar as la 1ª vez", " sacar as la 2ª vez ", " sacar rey la 1ª vez " y " sacar rey la 2ª vez ", respectivamente.

Datos del problema, *devolviendo la carta,* $p(A_1) = 4/6$; $p(R_1) = 2/6$; $p(A_2/A_1) = 4/6$; $p(A_2/R_1) = 4/6$, ….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden $p(A_1/A_2) = p(A_1 \cap A_2) / p(A_2)$

Aplicando el teorema de la probabilidad total, $p(A_2) = p(A_1).p(A_2/A_1) + p(R_1).p(A_2/R_1) =$
$= (4/6)\cdot(4/6) + (2/6)\cdot(4/6) = 4/6 = 2/3$.

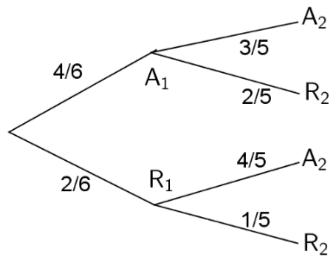
Luego $\mathbf{p(A_1/A_2) =}$ $[p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)]/ p(A_2) = [(4/6)\cdot(4/6)] / (2/3)$ $\mathbf{= 2/3 \cong 0'667.}$

b)

Si el ilusionista *no devolviera la primera carta* a la baraja y la segunda carta extraída fuera un as, ¿cuál es la probabilidad de que la primera carta haya sido también un as?

Me piden lo mismo pero *sin devolver la carta.*
Datos del problema, *sin devolver la carta,* $p(A_1) = 4/6$; $p(R_1) = 2/6$; $p(A_2/A_1) = 3/5$; $p(A_2/R_1) = 4/5$, ….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden $p(A_1/A_2) = p(A_1 \cap A_2) / p(A_2)$

Aplicando el teorema de la probabilidad total, $p(A_2) = p(A_1).p(A_2/A_1) + p(R_1).p(A_2/R_1) =$
$= (4/6)\cdot(3/5) + (2/6)\cdot(4/5) = 2/3$.
Luego **$p(A_1/A_2)$ =** $[p(A_1)\cdot p(A_2/A_1]/ p(A_2) = [(4/6)\cdot(3/5)] / (2/3)$ **= 3/5 = 0'6.**

EJERCICIO 4 (A)

(2'5 puntos) La talla media de los alumnos de una Universidad sigue una distribución Normal de media 170 cm y desviación típica 6 cm. Estudios recientes hacen sospechar que dicha talla media ha aumentado. Para confirmar, o no, esa sospecha se ha tomado una muestra de 64 estudiantes de esa Universidad, cuya talla media ha resultado ser de 172 cm. Con un nivel de significación del 1%, plantee un contraste de hipótesis ($H_0 : \mu \leq 170$), determine la región crítica de ese contraste y razone si se puede concluir que la talla media poblacional ha aumentado.

Solución

La talla media de los alumnos de una Universidad sigue una distribución Normal de media 170 cm y desviación típica 6 cm. Estudios recientes hacen sospechar que dicha talla media ha aumentado. Para confirmar, o no, esa sospecha se ha tomado una muestra de 64 estudiantes de esa Universidad, cuya talla media ha resultado ser de 172 cm. Con un nivel de significación del 1%, plantee un contraste de hipótesis ($H_0 : \mu \leq 170$), determine la región crítica de ese contraste y razone si se puede concluir que la talla media poblacional ha aumentado.

Del problema tenemos desviación típica poblacional = σ = 6, tamaño de la muestra n = 64, media poblacional = μ = 170, y media muestral $\overline{x}$ = 172, luego $X \to N(170,6)$, y *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:*

$$N\left(170, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(170, \frac{6}{\sqrt{64}}\right) = N(170, 0'75)$$

Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.
También nos dicen que $H_0 : \mu_0 \leq 170$, con un nivel de significación de α = 1% = 0'01.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

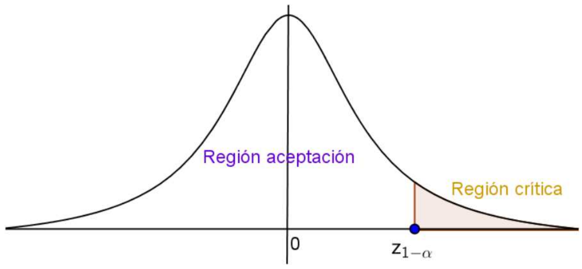
El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \leq 170$ (la media poblacional no supera el límite máximo de 170 cm) y $H_1 : \mu_0 > 170$, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste unilateral por la derecha, por tanto la región crítica está a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$ *.*

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0'99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'9901, que corresponden al **valor crítico $z_{1-\alpha}$ = 2'33**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{172 - 170}{6/\sqrt{64}} \cong 2'667$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba $z_0 \cong 2'667$ está a la derecha** del punto crítico **$z_{1-\alpha}$ = 2'33**, **estamos en la zona de rechazo o región crítica**.

Resumiendo, **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 170$ para un nivel de significación α = 0'01 y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: $\mu_0 > 170$**

Con lo cual, con un nivel de significación del 1%, concluimos que la talla media de los alumnos ha aumentado.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible definida por las siguientes restricciones:

$4x + 2y \ge 5 \quad 2x + 5y \le 10 \quad 2x + 2y \le 6 \quad x \ge 0 \;\; y \ge 0$

y calcule sus vértices.

b) (0'5 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo F(x, y) = x + 2y en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Solución

Represente gráficamente la región factible definida por las siguientes restricciones:

$4x + 2y \ge 5$; $2x + 5y \le 10$; $2x + 2y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, y calcule sus vértices.

Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo F(x, y) = x + 2y en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Función a optimizar es F(x,y) = x + 2y.

Restricciones: $4x + 2y \ge 5$; $2x + 5y \le 10$; $2x + 2y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $4x + 2y \ge 5$; $2x + 5y \le 10$; $2x + 2y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $4x + 2y = 5$; $2x + 5y = 10$; $2x + 2y = 6$; $x = 0$; $y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -2x + 5/2$; $y = -2x/5 + 2$; $y = -x + 3$ $x = 0$; $y = 0$

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 0$ e $y = -2x+5/2$, tenemos $0 = - 2x+5/2 \rightarrow 2x = 5/2 \rightarrow x = 5/4 = 1'25$, y el vértice es A(1'25,0).

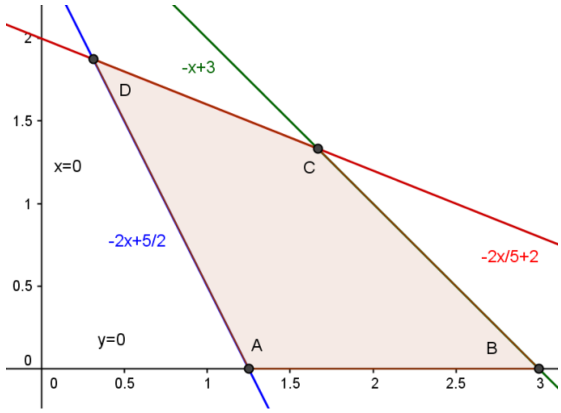
De $y = 0$ e $y = -x+3$, tenemos $0 = - x+3 \rightarrow x = 3$, y el vértice es B(3,0).

De $y = -x+3$ e $y = -2x/5+2$, tenemos $-x+3 = -2x/5 + 2 \rightarrow -5x+15 = -2x + 10 \rightarrow 5 = 3x$, con lo cual $x = 5/3$, e $y = -5/3 + 3 = 4/3$, y el vértice es C(5/3,4/3).

De $y = -2x+5/2$ e $y = -2x/5+2$, tenemos $-2x+5/2 = -2x/5 + 2 \rightarrow -20x+25 = -4x + 20 \rightarrow 5 = 16x$, con lo cual $x = 5/16$, e $y = -2(5/16) + 5/2 = 15/8$, y el vértice es D(5/16,15/8).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(1'25,0), B(3,0), C(5/3,4/3) y D(5/16,15/8).

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, que es el polígono convexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = x + 2y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(1’25,0), B(3,0), C(5/3,4/3) y D(5/16,15/8). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(1’25,0) = (1’25) + 2(0) **= 1’25**; F(3,0) = (3) + 2(0) = 3;
F(5/3,4/3) = (5/3) + 2(4/3) = **13/3** ≅ **4’33**; F(5/16,15/8) = (5/16) + 2(15/8) = 65/16 = 4’0625.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 13/3** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(5/3,4/3), y el mínimo absoluto de la función F en la región es 1’25 (el menor valor en los vértices) y se alcanza en el vértice A(1’25,0).**

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$.

a) (1’5 puntos) Halle los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en x = -1.
b) (1 punto) Para a = 1 y b = -1 obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = -2.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$.

a)
Halle los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en x = -1.

Como f es derivable en x = 1, también es continua en x = 1.

f(x) es continua en x = -1 si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.

$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-x^2+b(x-1)) = -(-1)^2+b((-1)-1) = -1-2b$;

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{2}(ax-12) = \frac{1}{2}(a(-1)-12) = -a/2 - 6$, como son iguales → **-a/2-6 = -1-2b.**

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + b(x-1) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si } x < -1 \\ -2x + b & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Como f(x) es derivable en x = -1, existe f ‘(-1), es decir $f'(-1^-) = f'(-1^+)$.
Usaremos la continuidad de la derivada.
$f'(-1) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} (a/2) = a/2$. $f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x+b) = 2+b$, de donde **a/2 = 2+b.**
Sustituyendo → -2-b-6 = -1-2b → **b = 7**, de donde a/2 = 2+(7) = 9, de donde **a = 18.**
b)
Para a = 1 y b = -1 obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de

abscisa x = -2.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 - x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

Vemos que x = -2 está en la rama x < -1, donde f(x) = (x – 12)/2 y f '(x) = 1/2.

La recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = -2 es : *y - f(-2) = f '(-2)·(x+2)*

De f(x) = (x – 12)/2, f(-2) = -14/2 = -7.
De f '(x) = 1/2, f '(-2) = 1/2.
La recta tangente pedida es y + 7 = (1/2)·(x+2) → y = x/2 – 6.

EJERCICIO 3 (B)

El 30% de los habitantes de una ciudad lee el diario A, el 13% el diario B, y el 6% ambos diarios.
a) (1'25 puntos) ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios?
b) (1'25 puntos) Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario B, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario A?

Solución

El 30% de los habitantes de una ciudad lee el diario A, el 13% el diario B, y el 6% ambos diarios.
a)
¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los diarios?

Llamamos A y B a los sucesos "habitantes que leen el diario A" y "habitantes que leen el diario B".
Del problema tenemos: p(A) = 30% = 0'3, p(B) = 13% = 0'13 y $p(A \cap B)$ = 6% = 0'06.

Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A \cup B)$; $p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B)$.

Me piden **p(no lee ningún diario) = p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ =** {Ley de Morgan} =
= $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A \cup B)$ = 1 - 0'37 **= 0'63.**
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ = 0'3 + 0'13 – 0'06 = 0'37
b)
Si se elige al azar un habitante de esta ciudad de entre los no lectores del diario B, ¿cuál es la probabilidad de que lea el diario A?

Me piden **p(leer el diario A, sabiendo que no lee el diario B) = $p(A/B^C)$**

Luego **$p(A/B^C)$** $= \frac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)}$ = **(**0'3 - 0'06)/(1 - 0'13) **= 8/29 ≅ 0'2759**.

EJERCICIO 4 (B)

El tiempo en horas dedicado cada día al uso de una aplicación de mensajería instantánea por los estudiantes de bachillerato de una ciudad, es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 0'5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos de uso en horas:

3'5 4'25 2'25 3'75 4'2 2'75 1'25 1'2 1'75 2'1

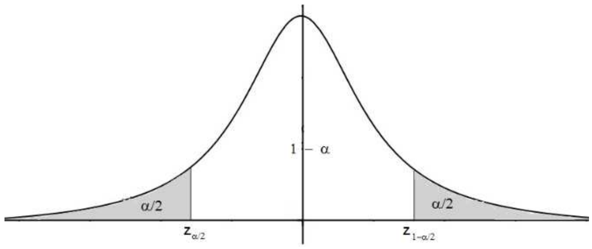
a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación por los estudiantes.
b) (1 punto) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación, para un error de estimación no superior a 0'1 horas y mismo nivel de confianza anterior.

Solución

El tiempo en horas dedicado cada día al uso de una aplicación de mensajería instantánea por los estudiantes de bachillerato de una ciudad, es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 0'5 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos de uso en horas:

3'5 4'25 2'25 3'75 4'2 2'75 1'25 1'2 1'75 2'1

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Determine un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación por los estudiantes.

Datos del problema: n = 10; $\overline{x}$ = (3’5+4’25+ 2’25+ 3’75+4’2+2’75+1’25+1’2+1’75+ 2’1)/10 = 2’7; σ = 0’5; nivel de confianza = 90% = 0’90 = 1 - α, de donde α = 0’1, con la cual α/2 = 0’1/2 = 0’05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’05 = 0’95, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’95 no viene; los más próximos son 0’9495 y 0’9505 que corresponden a 1’64 y 1’65, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = (1’64+1’65)/2 = 1’645, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2'7 - 1'645\cdot\frac{0'5}{\sqrt{10}}, 2'7 + 1'645\cdot\frac{0'5}{\sqrt{10}}\right)$ **= (2’4399,2’9601)**

b)
Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario dedicado al uso de esta aplicación, para un error de estimación no superior a 0’1 horas y mismo nivel de confianza anterior.

Datos del problema: Error = E ≤ 0’1, σ = 0’5, igual nivel de confianza = 90% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1’645.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 0’1, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'645\cdot 0'5}{0'1}\right)^2 \cong$ 67’65, es decir **el tamaño mínimo es de n = 68 estudiantes.**