SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO COLISIONES 2016 MODELO 3

OPCIÓN A

16_mod3_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2 y A^{2016}.
b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - B = C^t$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule A^2 y A^{2016}.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I_2}$.

$\mathbf{A^{2016}} = (A^2)^{1008} = (I_2)^{1008} = \mathbf{I_2}$.

b)
Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - B = C^t$.

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ = -1 - 0 = -1 $\neq$ 0, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

De $A\cdot X - B = C^t$, tenemos $AX = C^t + B$. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por A^{-1} tenemos:
$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(C^t + B) \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(C^t + B) \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(C^t + B)}$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. |A| = -1; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$C^t + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz es $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(C^t + B) =} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

16_mod3_EJERCICIO 2 (A)

En un ensayo clínico de 10 meses de duración, el porcentaje de células de un determinado tejido afectadas por un tipo de enfermedad en el paciente del estudio, viene dado por la función

$$P(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \le 10 \end{cases}$$, donde *t* es el tiempo en meses.

a) (1 punto) Represente gráficamente la función P(t).
b) (0'9 puntos) ¿En qué mes empieza a decrecer el porcentaje de células afectadas de dicho tejido? ¿Qué porcentaje hay justo en ese momento? ¿En algún otro mes del ensayo se alcanza ese mismo porcentaje?
c) (0'6 puntos) ¿En qué mes el porcentaje de células afectadas es máximo? ¿Cuál es el porcentaje en ese momento?

Solución

En un ensayo clínico de 10 meses de duración, el porcentaje de células de un determinado tejido afectadas por un tipo de enfermedad en el paciente del estudio, viene dado por la función

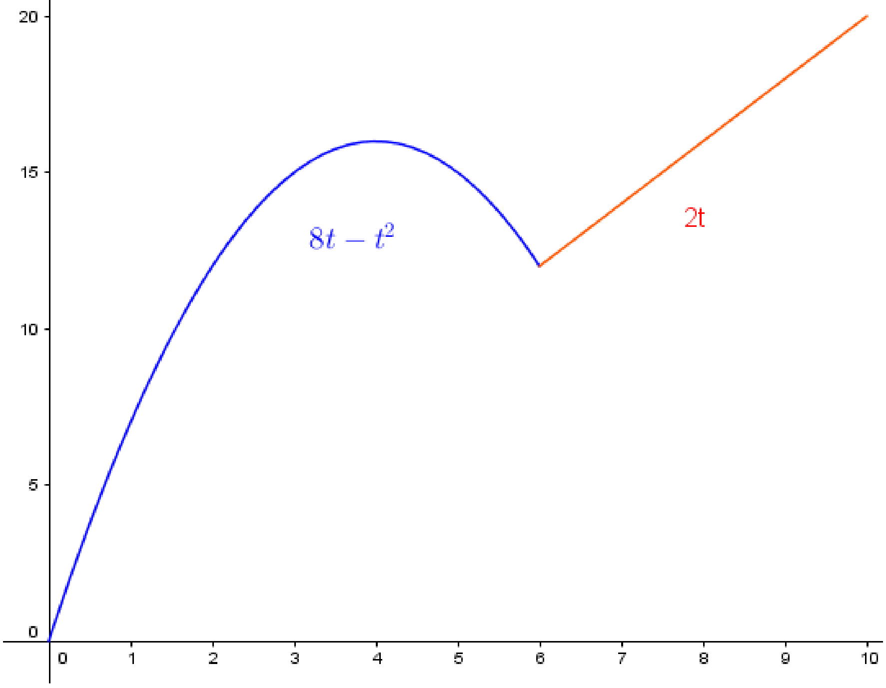
$P(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \le 10 \end{cases}$, donde *t* es el tiempo en meses.

a)
Represente gráficamente la función P(t).

Si $0 \le t \le 6$, $P(t) = 8t - t^2$, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo $\cap$, porque el

número que multiplica a t^2 es negativo.
Calculamos su vértice (es un máximo, por la forma de la parábola) y sus valores en t = 0 y t = 6
$P(0) = 8(0) – (0)^2 = 0$; $P(6) = 8(6) – (6)^2 = 12$;
Abscisa del vértice es la solución de $P'(t) = 0 = 8 – 2t \rightarrow 2t = 8$, de donde t = 4.
Vértice = $V(4,P(4)) = V(4, 8(4) – (4)^2) = V(4,16)$

Si $6 < t \le 10$, P(t) = 2t, cuya gráfica es un segmento. Con los puntos extremos es suficiente.
(6*,2(6)) = (6*,12); no se toca y (10,2(10)) = (10,20).
Observamos que es continua en t = 6, pues por la izquierda vale 12 y por la derecha también 12.
Un esbozo de la gráfica es:



b)
¿En qué mes empieza a decrecer el porcentaje de células afectadas de dicho tejido? ¿Qué porcentaje hay justo en ese momento? ¿En algún otro mes del ensayo se alcanza ese mismo porcentaje?

Observando la gráfica vemos que empieza a descender a partir del vértice del trozo de parábola, que era el punto V(4,16), es decir **a partir del cuarto mes**, **y el porcentaje es del 16%.**

Si observamos la gráfica vemos que 16 también se alcanza en el segmento 2t, por tanto de 2t = 16, tenemos t = 8, es decir **en el octavo mes el porcentaje también es del 16%**
c)
¿En qué mes el porcentaje de células afectadas es máximo? ¿Cuál es el porcentaje en ese momento?

Observando la gráfica vemos que el máximo absoluto es el punto (10,20), por tanto **en el décimo mes el porcentaje de células afectadas es máximo y llega al 20%.**

16_mod3_EJERCICIO 3 (A)
El 55% de los asistentes a un concierto son menores de 20 años. El 30% de los menores de 20 años y el 25% de los mayores de esa edad son chicas. Se elige uno de los asistentes al azar.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?
b) (0’75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 20 años, sabiendo que es una chica?
c) (0’75 puntos) Cuál es la probabilidad de que sea menor de 20 años, sabiendo que es un chico?

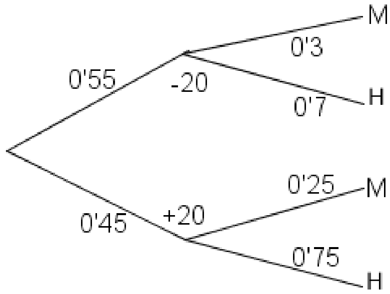
Solución

El 55% de los asistentes a un concierto son menores de 20 años. El 30% de los menores de 20 años y el 25% de los mayores de esa edad son chicas. Se elige uno de los asistentes al azar.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

Llamemos -20, +20, M y H, a los sucesos siguientes, “menor de 20 años”, "mayor de 20 años", "chica" y "chico", respectivamente.

Datos del problema p(-20) = 55% = 0'55; p(M/-20) = 30% = 0'3 ; p(M/+20) = 25% = 0'25, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

p(chica) = p(-20).p(M/-20) + p(+20).p(M/+20) = (0'55)·(0'3) + (0'45)·(0'25) **= 111/400 = 0'2775**.

b)
¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 20 años, sabiendo que es una chica?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(+20/M)} = \frac{p(+20 \cap M)}{p(M)} = \frac{p(+20).p(M/+20)}{p(M)} = \frac{(0'45)\cdot(0'25)}{0'2775} = \mathbf{15/37 \cong 0'405405}.$$

c)
Cuál es la probabilidad de que sea menor de 20 años, sabiendo que es un chico?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(-20/H)} = \frac{p(-20 \cap H)}{p(H)} = \frac{p(-20).p(H/+20)}{1 - p(M)} = \frac{(0'55)\cdot(0'7)}{1 - 0'2775} = \mathbf{154/289 \cong 0'53287}.$$

16_mod3_EJERCICIO 4 (A)

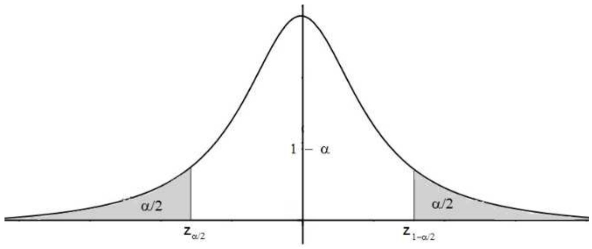
El número de pulsaciones por minuto (p/m) de los pacientes de un centro de salud de una cierta población sigue una ley Normal de desviación típica 9.
a) (1'5 puntos) Se elige una muestra aleatoria de 100 pacientes que da como número medio de p/m 68. Con un nivel del 97%, determine un intervalo de confianza para el número medio de las p/m de los pacientes del centro.
b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, ¿Cuántos pacientes, como mínimo, se necesitan en la muestra para estimar el número medio de p/m con un error no superior a 1?

Solución

El número de pulsaciones por minuto (p/m) de los pacientes de un centro de salud de una cierta población sigue una ley Normal de desviación típica 9.
a)
Se elige una muestra aleatoria de 100 pacientes que da como número medio de p/m 68. Con un nivel del 97%, determine un intervalo de confianza para el número medio de las p/m de los pacientes del centro.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$*.*

Datos del problema: $\sigma = 9$; $n = 100$; $\overline{x} = 68$; nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual $\alpha/2$ = 0'03/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'985 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(68 - 2'17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}, 68 + 2'17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} \right)$ = **(66'047,69'953)**

b)
Con el mismo nivel de confianza, ¿Cuántos pacientes, como mínimo, se necesitan en la muestra para estimar el número medio de p/m con un error no superior a 1?

Datos del problema: Error = E ≤ 1, σ = 9, igual nivel de confianza = 97% que nos daba $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$ =

= $\left(\frac{2'17 \cdot 9}{1} \right)^2$ = 381'4209, es decir **el número mínimo de pacientes es de n = 382.**

OPCION B

16_mod3_EJERCICIO 1 (B)

Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B, y vende todo lo que produce obteniendo un beneficio unitario de 500€ y 600€ respectivamente. Cada producto pasa por dos procesos de fabricación, P1 y P2. Una unidad del producto A necesita 3 horas en el proceso P1, mientras que una del producto B necesita 5 horas en ese proceso. La mano de obra contratada permite disponer, como máximo, de 150 horas semanales en P1 de 120 horas en P2. Además, son necesarias 3 horas en P2 para fabricar una unidad de cada uno de los productos.
a) (2 puntos) Plantee el problema de maximización de la función del beneficio semanal de la empresa, dibuje la región factible y obtenga sus vértices.
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el máximo beneficio semanal que puede obtener la empresa? ¿Cuánto debe fabricar de cada producto para obtener ese beneficio?

Solución

Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B, y vende todo lo que produce obteniendo un beneficio unitario de 500€ y 600€ respectivamente. Cada producto pasa por dos procesos de fabricación, P1 y P2. Una unidad del producto A necesita 3 horas en el proceso P1, mientras que una del producto B necesita 5 horas en ese proceso. La mano de obra contratada permite disponer, como máximo, de 150 horas semanales en P1 de 120 horas en P2. Además, son necesarias 3 horas en P2 para fabricar una unidad de cada uno de los productos.
a) Plantee el problema de maximización de la función del beneficio semanal de la empresa, dibuje la región factible y obtenga sus vértices.
b) ¿Cuál es el máximo beneficio semanal que puede obtener la empresa? ¿Cuánto debe fabricar de cada producto para obtener ese beneficio?

Es un problema de programación lineal. Realizamos (a) y (b) a la vez.

Sea x = nº de productos tipo A.
Sea y = nº de productos tipo B.
Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Horas P1	Horas P2
Producto A (x)	3	3
Producto B (y)	5	3
Total	150	120

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

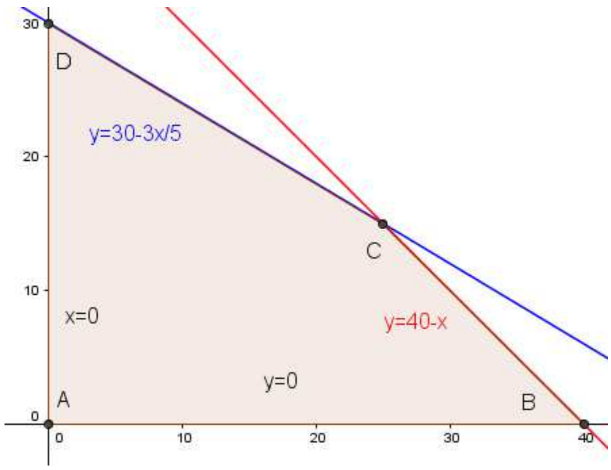
De "Una unidad del A necesita 3 horas en P1, mientras que una del B necesita 5 horas en ese proceso" $\rightarrow$
$\rightarrow$ 3x + 5y ≤ 150.
De "son necesarias 3 horas en P2 para fabricar una unidad de cada uno de los productos"
$\rightarrow$ 3x + 3y ≤ 120.
De "se fabrica algún producto tipo A o B" $\rightarrow$ x ≥ 0, y ≥ 0.
De "beneficio unitario de 500€ y 600€ respectivamente", tenemos que la función a optimizar es F(x,y) = 500x + 600y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 500x + 600y.
Restricciones: 3x + 5y ≤ 150; 3x + 3y ≤ 120; x ≥ 0; y ≥ 0

Las desigualdades 3x + 5y ≤ 150; 3x + 3y ≤ 120; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, 3x + 5y = 150; 3x + 3y = 120 es decir x + y = 40; x = 0; y = 0

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = 30 - 3x/5; y = 40 - x; x = 0; y = 0

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el vértice A(0,0).
De y = 0 e y = 40 - x, tenemos 0 = 40 - x $\rightarrow$ x = 40, y el vértice es B(40,0).
De y = 40 - x e y = 30 - 3x/5, tenemos 40 - x = 30 - 3x/5 $\rightarrow$ 200 – 5x = 150 - 3x $\rightarrow$ 50 = 2x, con lo cual x = 25 e y = 40 – (25) = 15, y el vértice es C(25,15).
De x = 0 e y = 30 - 3x/5, tenemos y = 30, y el vértice es D(0,30).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(40,0), C(25,15) y D(0,30).

Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = 500x + 600y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(40,0), C(25,15) y D(0,30). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 500(0) + 600(0) = 0; F(40,0) = 500(40) + 600(0) = 20000;
F(25,15) = 500(25) + 600(15) **= 21500**; F(0,30) = 500(0) + 600(30) = 18000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 21500** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(25,15),** es decir **el beneficio máximo es de 21500€ y se alcanza fabricando 25 productos del tipo A y 15 productos del tipo B.**

16_mod3_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$.
a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule la función derivada.
b) (0'8 puntos) Calcule las ecuaciones de sus asíntotas, en caso de que existan.
c) (0'7 punto) Halle los puntos de la gráfica de *f* donde la recta tangente sea tal que su pendiente valga - 1.

Solución

Sea la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$.
a)
Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule la función derivada.
La función f(x) = $\dfrac{3x + 1}{x - 1}$, es una función racional, cociente de dos funciones polinómicas, por tanto **es continua y derivable en su dominio**, es decir en R - {números que anulan el denominador; x - 1 = 0} =
= R – {1}.
Su derivada es $f'(x) = \dfrac{3\cdot(x - 1) - (3x + 1)\cdot 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{3x - 3 - 3x - 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{- 4}{(x - 1)^2}$.
b)
Calcule las ecuaciones de sus asíntotas, en caso de que existan.
La función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$, es una función racional, por tanto tiene por asíntotas verticales los números que anulan el denominador, y si numerador y denominador tienen igual grado, tiene asíntota horizontal, y es la misma en $\pm\infty$.
Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x + 1}{x - 1}\right) = 4/0^+ = +\infty$, **la recta x = 1 es una asíntota vertical de f(x).**
Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x + 1}{x - 1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}(3) = 3$, **la recta y = 3 es una asíntota horizontal en $\pm\infty$.**
c)
Halle los puntos de la gráfica de *f* donde la recta tangente sea tal que su pendiente valga - 1.

Sabemos que la pendiente genérica de la función f(x) es f '(x), por tanto igualamos f '(x) a -1.
$f'(x) = \dfrac{- 4}{(x - 1)^2} = -1$, es decir $4 = (x – 1)^2 = x^2 – 2x + 1$, de donde $x^2 – 2x – 3 = 0$. Resolviendo la ecuación tenemos $x = \dfrac{-(-2)\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, es decir x = 3 y x = -1.
Para x = 3, f(3) = 10/2 = 5. Para x = -1, f(-1) = -2/-2 = 1.
Los puntos de la gráfica de *f* donde la recta tangente sea tal que su pendiente valga – 1 son el (3,5) y el (-1,1)

16_mod3_EJERCICIO 3 (B)

Disponemos de tres dados. Dos de ellos tienen sus caras numeradas del 1 al 6 y el tercero tiene cinco caras numeradas con el 3 y la otra con el 1. Se elige al azar un de los tres dados y se realiza el lanzamiento.
a) (1 punto) Determina la probabilidad de que se obtenga un 3.
b) (0'7 punto) Determina la probabilidad de que se obtenga un número par.
c) (0'8 puntos) Si se ha obtenido un 3, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el tercer dado.

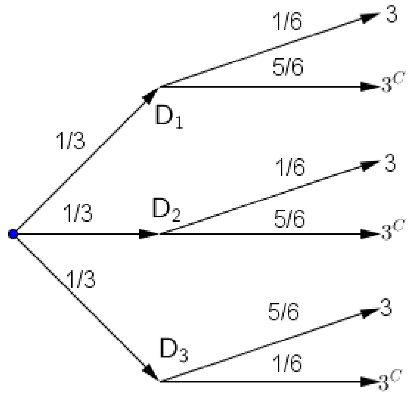
Solución

Disponemos de tres dados. Dos de ellos tienen sus caras numeradas del 1 al 6 y el tercero tiene cinco caras numeradas con el 3 y la otra con el 1. Se elige al azar un de los tres dados y se realiza el lanzamiento.
a) y c)
Determina la probabilidad de que se obtenga un 3.
Si se ha obtenido un 3, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el tercer dado.

Llamemos D_1, D_2, D_3, 3 y 3^C, a los sucesos siguientes, “lanzar dado 1”, "lanzar dado 2", "lanzar dado 3", “salir un 3” y " salir un número distinto de 3", respectivamente.

Datos del problema $p(D_1) = p(D_2) = p(D_3) = 1/3$; $p(3/D_1) = p(3/D_2) = 1/6$; $p(3/D_3)$ 5/6, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :

p(obtener un “3”) = $p(D_1).p(3/D_1) + p(D_2).p(3/D_2) + p(D_3).p(3/D_3) =$

$= (1/3)\cdot(1/6) + (1/3)\cdot(1/6) + (1/3)\cdot(5/6)$ **= 7/18 ≅ 0’3889**.

Si se ha obtenido un 3, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el tercer dado

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(D_3/3)} = \frac{p(D_3 \cap 3)}{p(3)} = \frac{p(D_3).p(3/D_3)}{p(3)} = \frac{(1/3)\cdot(5/6)}{7/18} = \mathbf{5/7} \cong \mathbf{0'7143}.$$

b)
Determina la probabilidad de que se obtenga un número par.

Para resolver este apartado se hace un árbol parecido al anterior pero al final del árbol, en vez de poner un ”3” se pone “par”. Tenemos en cuenta que $p(par/D_1) = p(par/D_2) = 3/6 = 1/2$ y $p(par/D_3) = 0/6 = 0$. Puesto que no hay números pares en el tercer dado, hay cinco treses y un uno.

Por el teorema de la Probabilidad Total :

p(obtener número “par”) = $p(D_1).p(par/D_1) + p(D_2).p(par/D_2) + p(D_3).p(par/D_3) =$

$= (1/3)\cdot(1/2) + (1/3)\cdot(1/2) + (1/3)\cdot(0)$ **= 1/3 ≅ 0’33333**.

16_mod3_EJERCICIO 4 (B)

(2’5 puntos) En una encuesta realizada a 600 trabajadoras de una empresa, 250 de ellas manifiestan estar insatisfechas con su salario. La dirección de la empresa afirma que la proporción de trabajadoras que están insatisfechas con su salario no es superior a 0’3. Plantee un contraste de hipótesis para dicha proporción, con hipótesis nula $H_0 : p \leq 0'3$. Con un nivel de significación del 4%, determine la región de rechazo y razone si se puede aceptar la afirmación de la dirección de la empresa.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:*

$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

En una encuesta realizada a 600 trabajadoras de una empresa, 250 de ellas manifiestan estar insatisfechas con su salario. La dirección de la empresa afirma que la proporción de trabajadoras que están insatisfechas con su salario no es superior a 0'3. Plantee un contraste de hipótesis para dicha proporción, con hipótesis nula $H_0 : p \leq 0'3$. Con un nivel de significación del 4%, determine la región de rechazo y razone si se puede aceptar la afirmación de la dirección de la empresa.

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'3$; $n = 600$; $\hat{p} = 250/600 = 5/12 \cong 0'41667$; $H_0 : p \leq 0'3$; con lo cual $H_0 : p_0 > 0'3$, que nos indica que es un contraste unilateral por la derecha; nivel de significación = $\alpha = 0,04 = 4\%$.

El problema lo dividimos en cinco etapas

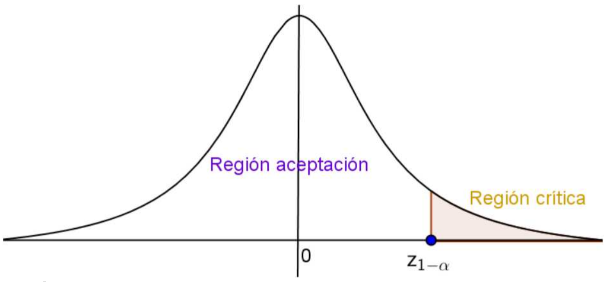
<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \leq 0'3$ y $H_1 : p_0 > 0'3$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica está a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto críticos que nos separará la región crítica y de la de aceptación.

Para el nivel de significación es $\alpha = 0'04$, tenemos $1 - \alpha = 1 – 0'04 = 0,96$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que viene dicha probabilidad no viene, la probabilidad mas próxima es 0'9599 y que corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha} = 1'75$ que separa las zonas de aceptación y rechazo. La región de rechazo es el intervalo $(1'75,+\infty)$

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{5/12 - 0'3}{\sqrt{\dfrac{0'3 \cdot 0'7}{600}}} \cong 6'236$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -6'236$ está **en la región de rechazo** para el punto crítico 1'75 que corresponde **al nivel de significación del 4%, rechazamos la hipótesis nula** H_0**:** H_0**:** $p_0 \leq 0'3$**, y aceptamos la hipótesis alternativa** $H_1 : p_0 > 0'3$**,** **<u>para el nivel de significación de $\alpha = 0'04$</u>.**

Con lo cual, con un nivel de significación del 4%, la afirmación de la empresa no es correcta, es decir la proporción de trabajadoras que están insatisfechas con su salario es superior a 0'3.