OPCIÓN A

17_mod4_EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) Una empresa envasa y comercializa leche entera y leche desnatada. El litro de leche entera envasado genera un beneficio diario a la empresa de 0'4 € y el de leche desnatada de 0'1 €. La tecnología de la empresa impone que el número de litros de leche entera que se envasan diariamente no supere el doble del número de litros de leche desnatada. Además, la cantidad máxima de leche que se puede envasar diariamente es un total de 3000 litros y solo se dispone de 1200 litros diarios de leche entera para envasar.
¿Cuánto debe envasar de cada producto para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto ascendería este beneficio?

Solución

Una empresa envasa y comercializa leche entera y leche desnatada. El litro de leche entera envasado genera un beneficio diario a la empresa de 0'4 € y el de leche desnatada de 0'1 €. La tecnología de la empresa impone que el número de litros de leche entera que se envasan diariamente no supere el doble del número de litros de leche desnatada. Además, la cantidad máxima de leche que se puede envasar diariamente es un total de 3000 litros y solo se dispone de 1200 litros diarios de leche entera para envasar.
¿Cuánto debe envasar de cada producto para obtener el beneficio máximo? ¿A cuánto ascendería este beneficio?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de litros de leche entera.
Sea y = nº de litros de leche desnatada.

De "el nº de litros de leche entera no supere el doble del nº de litros de leche desnatada" → $x \le 2y$.
De "la cantidad máxima de leche que se puede envasar es un total de 3000 litros" → $x + y \le 3000$.
De "solo se dispone de 1200 litros diarios de leche entera para envasar" → $x \le 1200$
De "se envasa algún litro de leche entera y de leche desnatada" → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

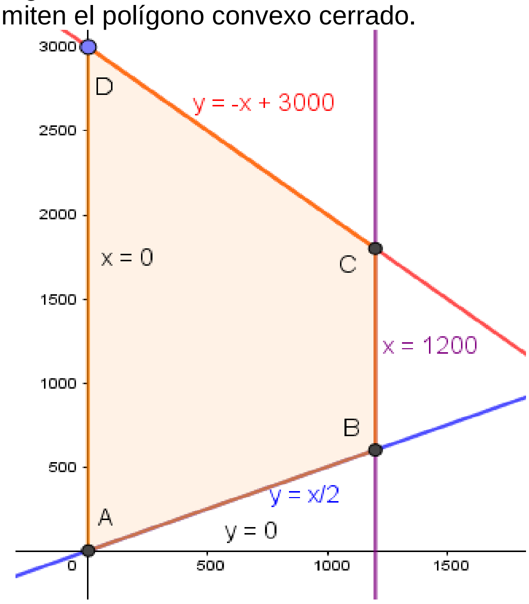
De "la leche entera genera un beneficio diario a la empresa de 0'4 € y el de leche desnatada de 0'1 €", tenemos la función a optimizar es B(x,y) = F(x,y) = 0'4x + 0'1y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 0'4x + 0'1y.
Restricciones: $x \le 2y$; $x + y \le 3000$; $x \le 1200$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $x \le 2y$; $x + y \le 3000$; $x \le 1200$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x = 2y$; $x + y = 3000$; $x = 1200$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos $y = x/2$; $y = -x + 3000$; $x = 1200$; $x = 0$; $y = 0$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades originales, y determinamos el polígono convexo cerrado; con el cual calcularemos los vértices A, B, C, y D de los cortes de las rectas que delimiten el polígono convexo cerrado.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice A(0,0).
De $y = x/2$ y $x = 1200$, tenemos $y = 1200/2 = 600$, y el vértice es B(1200,600).
De $x = 1200$ e $y = -x+3000$, tenemos $y = -1200 + 3000 = 1800$, y el vértice es C(1200,1800).
De $x = 0$ e $y = -x+3000$, tenemos $y = 3000$, y el vértice es D(0,3000).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(1200,600), C(1200,1800) y D(0,3000).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 0'4x + 0'1y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(1200,600), C(1200,1800) y D(0,3000). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,0) = 0'4(0) + 0'1(0) = 0$; $F_B(1200,600) = 0'4(1200) + 0'1(600) = 540$;
$\mathbf{F_C(1200,1800) =}$ $0'4(1200) + 0'1(1800)$ $\mathbf{= 660}$; $F_D(0,3000) = 0'4(0) + 0'1(3000) = 300$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 660** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(1200,1800), por tanto el máximo beneficio es de 660 €, y se obtiene envasando 1200 litros de leche entera y 1800 litros de leche desnatada.**

17_mod4_EJERCICIO 2 (A)

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$, donde t es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.
b) (1 punto) Represente gráficamente la función f, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.
c) (0'5 puntos) Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

Solución

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$, donde t es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

a)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

Sabemos que si la función $f(t) = t^2$ es continua y derivable en todo R, en particular es continua en el intervalo cerrado [0,2] y derivable en el abierto (0,2).

Sabemos que si la función f(t) = $f(t) = \dfrac{4}{t-1}$ es continua y derivable en todo R – {1}, en particular es continua en su dominio "t > 2".

Falta ver la continuidad y derivabilidad en t = 2.

f(t) es continua en t = 2 si $f(2) = \lim_{t\to 2^-} f(t) = \lim_{t\to 2^+} f(t)$.

$f(2) = \lim_{t\to 2^-} f(t) = \lim_{t\to 2^-} (t^2) = 2^2 = 4$; $\lim_{t\to 2^+} f(t) = \lim_{t\to 2^+} \left(\dfrac{4}{t-1}\right) = \left(\dfrac{4}{2-1}\right) = 4$.

Como los tres valores son iguales la función f es continua en t = 2.

f(t) es derivable en t = 2 si $f'(2^-) = f'(2^+)$ (Vemos la continuidad de la derivada)

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases} \; ; \qquad f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ \dfrac{-4}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

$f'(2^-) = \lim_{t\to 2^-} f'(t) = \lim_{t\to 2^-} (2t) = 2(2) = 4.$ $f'(2^+) = \lim_{t\to 2^+} f'(x) = \lim_{t\to 2^+} \left(\dfrac{-4}{(t-1)^2}\right) = \dfrac{-4}{(2-1)^2} = -4$.

Como $f'(2^-) = 4 \ne f'(2^+) = -4$, la función f no es derivable en t = 2.

b)

Represente gráficamente la función f, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{4}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases} \; ; \qquad f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 2 \\ \dfrac{-4}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si $0 \le t \le 2$, $f(t) = t^2$. Es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba, pasa por (0,0) y (2,4), y tiene abscisa del vértice en la solución de $f'(t) = 0 = 2t$, de donde t = 0, y el vértice es V(0,0)

Si $0 < t < 2$, $f'(t) = 2t$.

De $f'(t) = 0$, hemos visto t = 0 que sería un posible extremo relativo.

Como $f'(1) = 2(1) = 2 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,2).

Si $t > 2$, $f(t) = \dfrac{4}{t-1}$, cuya gráfica es un trozo de hipérbola. Su derivada era $f(t) = \dfrac{-4}{(t-1)^2}$.

Como $f'(3) = \dfrac{-4}{(3-1)^2} = -1 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(2,+\infty)$.

Por definición t = 2 es un máximo relativo, *no derivable*, que vale $f(2) = (2)^2 = 4$.

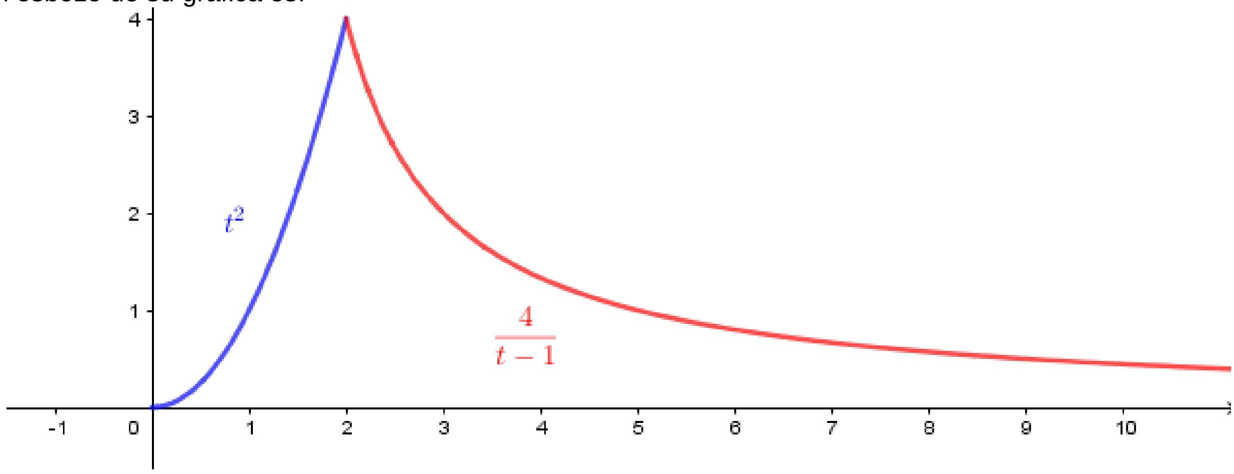
Para terminar de dibujar el trozo de hipérbola, veamos sus asíntotas.

Para $t > 2$, tenemos $f(t) = \dfrac{4}{t-1}$, cuya gráfica es un hipérbola y tiene asíntota vertical (número que anula el denominador, <u>si está en el dominio</u>) y asíntota horizontal (en este caso en $-\infty$).

De $t - 1 = 0$, tenemos t = 1, que no está en el dominio x > 2, **luego no tiene asíntota vertical.**

Como $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\dfrac{4}{t-1}\right) = 4/{+\infty} = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en $+\infty$.**

Un esbozo de su gráfica es:



c)

Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

Como hemos visto al esbozar la **gráfica la máxima contracción del iris se obtiene en el máximo relativo, no derivable, t = 2 y valía f(2) = 4 décimas de milímetro**.

17_mod4_EJERCICIO 3 (A)

En un departamento de una Universidad hay 8 profesores y 14 profesoras. Se quiere constituir una comisión formada por 2 miembros del departamento, elegidos al azar.
a) (0’75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean profesoras?
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la comisión esté constituida por un profesor y una profesora.
c) (0’75 puntos) Halle la probabilidad de que en la comisión no haya ninguna profesora.

Solución

En un departamento de una Universidad hay 8 profesores y 14 profesoras. Se quiere constituir una comisión formada por 2 miembros del departamento, elegidos al azar.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que sean profesoras?

Llamemos M_1, M_2, H_1 y H_2 a los sucesos "primera elegida sea profesora”, "segunda elegida sea profesora” , "primer elegido sea profesor” y "segundo elegido sea profesor”, respectivamente

Me están pidiendo **p(que las dos sean profesoras) = $p(M_1 \cap M_2)$** = $p(M_1)\cdot p(M_2 \cap M_1)$ =
= (8/22)·(7/21) **= 4/33 ≅ 0’121212.**
b)
Calcule la probabilidad de que la comisión esté constituida por un profesor y una profesora.

Me están pidiendo **p(un profesor y una profesora) = $p(M_1 \cap H_2) + p(H_1 \cap M_2)$ =**
= $p(M_1)\cdot p(H_2 \cap M_1) + p(H_1)\cdot p(M_2 \cap H_1)$ **=** (8/22)·(14/21) + (14/22)·(8/21) **= 16/33 ≅ 0’48485.**
c)
Halle la probabilidad de que en la comisión no haya ninguna profesora.

Me están pidiendo **p(que los dos sean profesores) = $p(H_1 \cap H_2)$** = $p(H_1)\cdot p(H_2 \cap H_1)$ =
= (14/22)·(13/21) **= 91/253 ≅ 0’3597.**

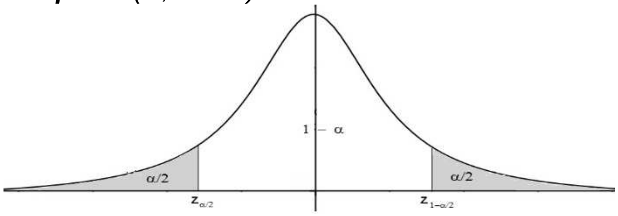
17_mod4_EJERCICIO 4 (A)

Se desea estimar la proporción de jóvenes que ven una serie de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes, de los que 36 ven la serie.
a) (1’5 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 96 %, para la proporción de jóvenes que ven la serie.
b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 0’03, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

Solución

Se desea estimar la proporción de jóvenes que ven una serie de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes, de los que 36 ven la serie.

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$*.*

a)

Determine un intervalo de confianza, al 96 %, para la proporción de jóvenes que ven la serie.

Datos del problema: n = 100; $\hat{p}$ = 36/100 = 0'36, $\hat{q}$ = 1 - 0'36 = 0'64, nivel de confianza = 96% = 0'96 =

= 1 - α, de donde α = 0'04, con la cual $\alpha/2$ = 0'04/2 = 0'02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'98 no viene, y que la probabilidad más próxima es 0'9798, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'36 - 2'05\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot 0'64}{100}}, 0'36 + 2'05\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot 0'64}{100}}\right) =$$

= (0'2616; 0'4584), para la proporción de jóvenes que ven la serie.

b)

Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 0'03, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'36, $\hat{q}$ = 0'64, error = E ≤ 0'03, nivel de confianza el mismo 97%, al cual le correspondía un punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'05)^2\cdot 0'36\cdot 0'64}{(0'03)^2}$ = 1075'84, por tanto **el tamaño mínimo de los jóvenes que hay que seleccionar es n = 1076.**

OPCION B

17_mod4_EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (1'2 puntos) Razone cuáles de las siguientes operaciones son posibles:

$A\cdot B^t$ $B + 3C$ $C\cdot B^t$ $A\cdot B + C$

b) (1'3 puntos) Resuelva la ecuación matricial A·B·X = C

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x3}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{3x2}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{2x2}$.

a) (1'2 puntos) Razone cuáles de las siguientes operaciones son posibles:

$A\cdot B^t$ $B + 3C$ $C\cdot B^t$ $A\cdot B + C$

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz. También sabemos que se pueden sumar matrices del mismo orden.

$A_{2x\mathbf{3}}\cdot B^t_{\mathbf{2}x3}$, **no se puede multiplicar** por lo indicado antes.

$B_{\mathbf{3x2}} + 3C_{\mathbf{2x2}}$, **no se puede sumar** por lo indicado antes, es decir no tienen el mismo orden.

$C_{2x\mathbf{2}}\cdot B^t_{\mathbf{2}x3}$, **si se puede multiplicar** por lo indicado antes, y el producto tiene de orden 2x3.

$A_{2x\mathbf{3}}\cdot B_{\mathbf{3}x2} + C_{2x2}$, **si se puede sumar** por lo indicado antes, pues el primer producto tiene de orden 2x2.

b)

Resuelva la ecuación matricial A·B·X = C

Llamamos D = A·B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Como det(D) = |D| = $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ = 3 - 2 = 1 ≠ 0, existe la matriz inversa $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj((D)^t)$.

De A·B·X = C, tenemos D·X = C. Multiplicando por la izquierda la expresión D·X = C por la inversa D^{-1}, tenemos $D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X = D^{-1}\cdot C \rightarrow$ $\mathbf{X = D^{-1}\cdot C}$

Calculamos $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj((D)^t)$; $|D| = 1$; $D^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj((D)^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz es $\mathbf{X = D^{-1}\cdot C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$**.**

17_mod4_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.
b) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.

La función $1/(x – 4)$ es continua y derivable en R – {4}, en particular es continua en $x \le 0$, y derivable en $x < 0$.
La función $x + 4$ es continua y derivable en R, en particular es continua y derivable en $0 < x < 2$.
La función $x^2 + 1$ es continua y derivable en R, en particular es continua en $x \ge 2$, y derivable en $x > 2$.

Nos falta ver la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$

f(x) es continua en $x = 0$ si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x-4}\right) = \frac{1}{0-4} = -1/4 = -0'25$;

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + 3) = (0) + 3 = 3$, **como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -0'25 \ne \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$, la función no es continua en $x = 0$, y por tanto tampoco es derivable en $x = 0$**.

En $x = 0$ la función f tiene un punto de discontinuidad inevitable de salto finito, el salto es 3'25 =
= |3 - (-0'25)|, es decir el valor absoluto de la diferencia de los limites laterales.

f(x) es continua en $x = 2$ si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x + 3) = (2 + 3) = 5$;

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 5$, **como $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$, la función es continua en $x = 5$, y por tanto la función f es continua en R – {0}.**

b)
Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

Sólo nos falta ver la derivabilidad en $x = 2$. (Estudiaremos la continuidad de la derivada)

f(x) es derivable en $x = 2$ si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}; \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (1) = 1$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x) = 2(2) = 4$, **como $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = = 1 \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 4$, la función f no es derivable en x = 2, por tanto f es derivable en R – {0,2}, y su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-4)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

17_mod4_EJERCICIO 3 (B)

Los alumnos que cursan una asignatura deben realizar dos exámenes: uno teórico y otro práctico. El 50 % de los alumnos aprueba los dos exámenes, el 6 % no aprueba ninguno y el 20 % solo aprueba el teórico. Se elige un alumno al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) (1'5 puntos) Si ha aprobado el teórico, ¿cuál es la probabilidad de que no apruebe el examen práctico?

Solución

Los alumnos que cursan una asignatura deben realizar dos exámenes: uno teórico y otro práctico. El 50 % de los alumnos aprueba los dos exámenes, el 6 % no aprueba ninguno y el 20 % solo aprueba el teórico. Se elige un alumno al azar.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

Llamemos A y B a los sucesos "aprobar el examen teórico" y "aprobar el examen práctico", respectivamente

De, el 50 % de los alumnos aprueba los dos exámenes, tenemos p(A y B) = $p(A\cap B)$ = 50% = 0'5.

De, el 6 % no aprueba ninguno, tenemos p(noA y noB) = $p(A^C\cap B^C)$ = 6% = 0'06.

De, el 20 % solo aprueba el teórico, tenemos p(A y noB) = $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$ = 20% = 0'2, de donde $p(A) = 0'2 + p(A\cap B) = 0'2 + 0'5 = 0'7$.

Me están pidiendo **$p(A \text{ ó } B) = p(A\cup B)$ = {++} = 0'94.**

{++} = De $p(A^C\cap B^C)$ = 0'06 = {Ley de Morgan y contrario} = $p((A\cup B)^C) = 1 - p(A\cup B)$, tenemos que:

$p(A\cup B) = 1 - 0'06 = 0'94$.

b)

Si ha aprobado el teórico, ¿cuál es la probabilidad de que no apruebe el examen práctico?

Me están pidiendo **p(no aprobar practico, sabiendo que ha aprobado el teórico) = p(noB/A) =**

$$= p(B^C/A) = \frac{p(B^C\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A\cap B^C)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A\cap B)}{p(A)} = (0'7 - 0'5)/0'7 = 2/7 \cong 0'2857.$$

17_mod4_EJERCICIO 4 (B)

El peso de los paquetes de levadura de una marca sigue una ley Normal de desviación típica 0'3 g. Se desea construir un intervalo de confianza, al 98 %, para estimar la media.

Para ello, se toma una muestra aleatoria de 9 paquetes.

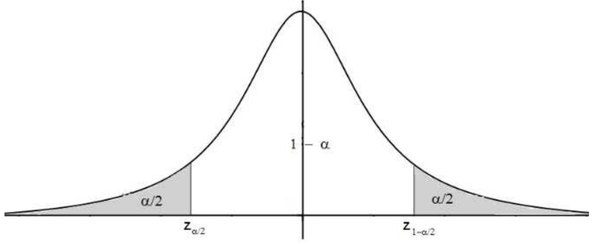
a) (1'25 puntos) ¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?

b) (1'25 puntos) Obtenga el intervalo sabiendo que los pesos, en gramos, de los paquetes son:

10 9'9 10'04 9'5 10'1 9'8 10'2 10 10'3

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\bar{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\bar{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. $(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

Sabemos que la amplitud del I.C. es Amplitud = b – a =

$$= \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot\left(z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$*.*

El peso de los paquetes de levadura de una marca sigue una ley Normal de desviación típica 0’3 g. Se desea construir un intervalo de confianza, al 98 %, para estimar la media.
Para ello, se toma una muestra aleatoria de 9 paquetes.
a)
¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?

Datos del problema: n = 9; ; σ = 0’3; nivel de confianza = 98% = 0’98 = 1 - α, de donde α = 1 – 0’98 = 0’02, con la cual α/2 = 0’02/2 = 0’01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’99 vemos que no viene, y la más próxima es 0’9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'33$, por tanto la amplitud del intervalo de confianza pedido es:

Amplitud = $2\cdot\left(z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\cdot\left(2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}}\right)$ **= 233/500 g = 0’0466 g.**

I.C.(μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(48 - 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}, 48 + 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}\right)$ **= (47’02,48’98)**

b)
Obtenga el intervalo sabiendo que los pesos, en gramos, de los paquetes son:

10 9’9 10’04 9’5 10’1 9’8 10’2 10 10’3

Datos del problema: n = 9; $\bar{x}$ = (10+9’9+10’04+9’5+10’1+9’8+10’2+10+10’3)/9 = 2246/225 ≅ 0’98222; σ= 0’3; nivel de confianza = 98% = 0’98, y hemos visto en el aparatado (a) que su punto crítico $z_{1-\alpha/2} = 2'33$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9'98222 - 2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}}, 9'98222 + 2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}}\right)$ **=**

= (9’74922,10’21522) gramos.