OPCIÓN A

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 1 (A)

Se considera la región definida por las siguientes inecuaciones:

$2x - y \geq 2 \qquad -x + 2y \leq 2 \qquad 3x + y \leq 15 \qquad y \geq 0$

a) (1'8 puntos) Represéntela gráficamente y determine sus vértices.
b) (0'2 puntos) Indique razonadamente si el punto (3,3) pertenece a dicha región.
c) (0'5 puntos) ¿En qué puntos de la región anterior la función F(x,y) = 3x – 2y alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son éstos?

Solución

Se considera la región definida por las siguientes inecuaciones:

$2x - y \geq 2 \qquad -x + 2y \leq 2 \qquad 3x + y \leq 15 \qquad y \geq 0$

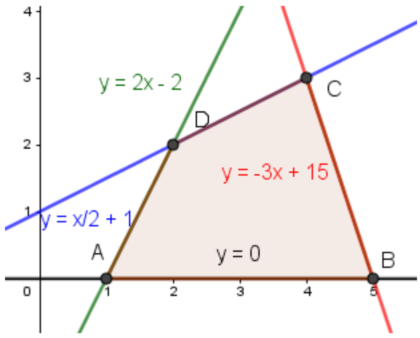
a)
Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

Las desigualdades $2x - y \geq 2$; $-x + 2y \leq 2$; $3x + y \leq 15$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $2x - y = 2$; $-x + 2y = 2$; $3x + y = 15$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$2x - 2 = y$; $y = x/2 + 1$; $y = -3x + 15$; $y = 0$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B, C y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 0$ e $y = 2x - 2$, tenemos $2x - 2 = 0$, luego $x = 1$ y el vértice es A(1,0).
De $y = 0$ e $y = -3x + 15$, tenemos $-3x + 15 = 0$, luego $x = 5$ y el vértice es B(5,0).
De $y = x/2 + 1$ e $y = -3x + 15$, tenemos $x/2 + 1 = -3x + 15 \rightarrow x + 2 = -6x + 30 \rightarrow 7x = 28$, con lo cual $x=4$ e $y = 3$, y el vértice es C(4,3).
De $y = x/2 + 1$ e $y = 2x - 2$, tenemos $x/2 + 1 = 2x - 2 \rightarrow x + 2 = 4x - 4 \rightarrow 6 = 3x$, con lo cual $x=2$ e $y = 2$, y el vértice es D(2,2).

b)
Indique razonadamente si el punto (3,3) pertenece a dicha región.

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(1,0), B(5,0), C(4,3) y D(2,2).

El punto (3,3) pertenece la región convexa si verifica todas las inecuaciones que la determinan:

$2x - y \geq 2 \qquad -x + 2y \leq 2 \qquad 3x + y \leq 15 \qquad y \geq 0$

$2(3) - (3) \geq 2 \rightarrow 3 \geq 2$. CIERTO
$-(3) + 2(3) \leq 2 \rightarrow 3 \leq 2$. **FALSO**
$3(3) + (3) \leq 15 \rightarrow 12 \leq 15$. CIERTO
$(3) \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0$. CIERTO

Como el punto (3,3) no si verifica todas las inecuaciones, el punto (3,3) no pertenece la región convexa.

c)
¿En qué puntos de la región anterior la función F(x,y) = 3x – 2y alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son éstos?

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F(x,y) = 3x – 2y en los vértices anteriores A(1,0), B(5,0), C(4,3) y D(2,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(1,0) = 3(1) - 2(0) = 3$; **$F_B(5,0) =$** $3(5) - 2(0)$ **$= 15$**;
$F_C(4,3) = 3(4) - 2(3) = 6$; **$F_D(2,2) =$** $3(2) - 2(2)$ **$= 2$**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 15** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(5,0) y el mínimo absoluto de la función F en la región es 2** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(2,2).**

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 2 (A)

La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}.$$

a) (1 punto) Determine “a” y “b” para que la función sea continua en los instantes t =1 y t = 5.
b) (1’5 puntos) Para a = 5 y b = -20, estudie la derivabilidad en los instantes t =1 y t = 5. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima?

Solución

La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}.$$

a)
Determine “a” y “b” para que la función sea continua en los instantes t =1 y t = 5.

Como es continua en t = 1 tenemos $v(1) = \lim_{t\to 1^+} v(t) = \lim_{t\to 1^-} v(t)$.

$v(1) = 2(1) - a = 2 - a$.
$\lim_{t\to 1^-} v(t) = \lim_{t\to 1^-} (7t^2) = 7(1)^2 = 7$.
$\lim_{t\to 1^+} v(t) = \lim_{t\to 1^+} (2t + a) = 2(1) + a = 2 + a$.

Igualando tenemos 7 = 2 + a, de donde **a = 5**.

Como es continua en t = 5 tenemos $v(5) = \lim_{t\to 5^+} v(t) = \lim_{t\to 5^-} v(t)$.

$v(5) = 2(5) + 5 = 15$.
$\lim_{t\to 5^-} v(t) = \lim_{t\to 5^-} (2t + 5) = 2(5) + 5 = 15$.
$\lim_{t\to 5^+} v(t) = \lim_{t\to 5^+} (-t^2 + 12t + b) = -(5)^2 + 12(5) + b = 35 + b$.

Igualando tenemos 15 = 35 + b, de donde **b = -20**.
b)
Para a = 5 y b = -20, estudie la derivabilidad en los instantes t =1 y t = 5. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima?

Observamos del apartado anterior que para los valores a = 5 y b = -20, la función v es continua en t = 1 y t = 5, por tanto sólo falta ver la derivabilidad en t = 1 y t = 5.

Tenemos $v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si } 1 \le t \le 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$; $v'(t) = \begin{cases} 14t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < t < 5 \\ -2t + 12 & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$.

La función v(t) es derivable en t = 1 si v ‘(1-) = v ‘(1+). Estudiamos la continuidad de la derivada.

$v'(1^-) = \lim_{t\to 1^-} v'(t) = \lim_{t\to 1^-} (14t) = 14(1) = 14$.
$v'(1^+) = \lim_{t\to 1^+} v'(t) = \lim_{t\to 1^+} (2) = 2$.

Como v '(1-) = 14 $\neq$ v '(1+) = 2, la función v(t) no es derivable en t = 1

La función v(t) es derivable en t = 5 si v '(5-) = v '(5+). Estudiamos la continuidad de la derivada.

v '(5-) = lim $_{t\to 5-}$ v '(t) = lim $_{t\to 5-}$ (2) = 2.
v '(5+) = lim $_{t\to 5+}$ v '(t) = lim $_{t\to 5+}$ (-2t + 12) = -2(5) + 12 = 2.

Como v '(5-) = v '(5+) = 2, la función v(t) es derivable en t = 1

Veamos el máximo absoluto.

Sabemos que el extremo absoluto se suele alcanzar en los extremos del intervalo (**t = 0, t = 10**); los puntos donde no es continua o derivable (**t = 1**), y las soluciones de v '(t) = 0.
Si 0 < t < 1, v '(t) = 14t. De v '(t) = 0 tenemos 14t = 0, luego t = 0.
Si 1 < t < 5, v '(t) = 2. De v '(t) = 0 tenemos 2 = 0, lo cual es absurdo.
Si 5 < t < 10, v '(t) = -2t + 12. De v '(t) = 0 tenemos -2t + 12 = 0, luego **t = 6**.

Evaluamos la función v(t) en los valores t = 0, t = 1, t = 6 y t = 10. El valor más grande será el máximo absoluto.

Tenemos v(0) = 7(0)^2 = 0.
Tenemos v(1) = 2(1) + 5 = 7.
Tenemos **v(6)** = -(6)^2 + 12(6) - 20 **= 16**.
Tenemos v(10) = -(10)^2 + 12(10) - 20 = 0.

Por tanto la velocidad máxima es 16 y se alcanza en el momento t = 6.

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 3 (A)

El 80% del alumnado de una determinada universidad accede a los estudios que marca como primera opción. De ellos el 75% termina el Grado, mientras que solo el 40% de los que acceden a estudios que no han marcado como primera opción termina el Grado. Se elige un alumno al azar de esa universidad.
a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que no haya terminado el Grado.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no accediera a los estudios marcados como primera opción, sabiendo que no ha terminado el Grado.

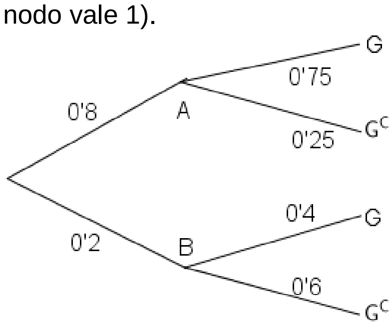
Solución

El 80% del alumnado de una determinada universidad accede a los estudios que marca como primera opción. De ellos el 74% termina el Grado, mientras que solo el 40% de los que acceden a estudios que no han marcado como primera opción termina el Grado. Se elige un alumno al azar de esa universidad.
a)
Calcule la probabilidad de que no haya terminado el Grado.

Llamemos A, B, G y G^C, a los sucesos siguientes, "estudiar la primera opción elegida", "no estudiar la primera opción elegida", "alcanzar el Grado" y "no alcanzar el Grado", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 80% = 0'8; p(G/A) = 75% = 0'75 ; p(G/B) = 40% = 0'4, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(G^C) =** p(A).p(G^C/A) + p(B).p(G^C/B) = (0'8)·(0'25) + (0'2)·(0'6) **= 8/25 = 0'32**.
b)
Calcule la probabilidad de que no accediera a los estudios marcados como primera opción, sabiendo que no

ha terminado el Grado.

Me piden **p(B/G^C)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/G^C) =} \frac{p\left(B \cap G^C\right)}{p(G^C)} = \frac{p\left(B\right) \cdot p(G^C/B)}{p(G^C)} = \frac{(0'2) \cdot (0'6)}{0'32} \mathbf{= 3/8 = 0'375}.$$

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 4 (A)
A la salida de unos grandes almacenes se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 clientes, a los que se le ha preguntado por el gasto que han realizado, obteniéndose una media muestral de 110 euros. Se sabe que el gasto sigue una distribución Normal con desviación típica 20 euros.
a) (0'5 puntos) ¿Qué distribución de probabilidad sigue la media muestral?
b) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza al 90 %, para el gasto medio de todos los clientes que han comprado ese día.
c) (1 punto) Si deseamos que error máximo cometido, con el mismo nivel de confianza, sea 2 euros, ¿cuál ha de ser el tamaño muestral mínimo de la muestra?

Solución

A la salida de unos grandes almacenes se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 clientes, a los que se le ha preguntado por el gasto que han realizado, obteniéndose una media muestral de 110 euros. Se sabe que el gasto sigue una distribución Normal con desviación típica 20 euros.
a)
¿Qué distribución de probabilidad sigue la media muestral?

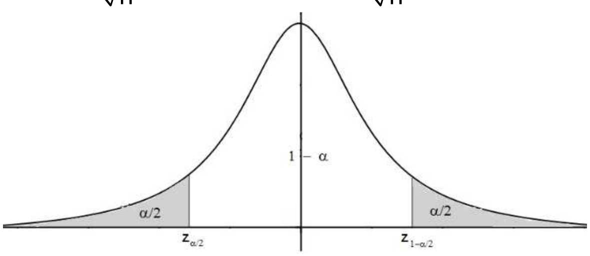
Sabemos, por el Teorema Central del límite, que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), donde μ es la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, entonces la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, donde n es el tamaño de la muestra y $\mu = \overline{x}$.

Si X no siguiese una normal pero n ≥ 30, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ si sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

En nuestro caso la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(110, \frac{20}{\sqrt{100}}) = N(110,2)$.

b)
Obtenga un intervalo de confianza al 90 %, para el gasto medio de todos los clientes que han comprado ese día.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b); también sabemos que $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ son los puntos críticos de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = (b - a)/2, para el intervalo de confianza de las medias, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: σ = 20; n = 100; $\overline{x}$ = 110; nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'1, con la cual $\alpha/2 = 0'1/2 = 0'05$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene; los más próximos son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2} = (1'64+1'65)/2 = 1'645$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(110 - 1'645\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}, 110 + 1'645\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}\right)$ **= (106'71,113'29) euros para el gasto medio de los clientes en un día.**

c)

Si deseamos que error máximo cometido, con el mismo nivel de confianza, sea 2 euros, ¿cuál ha de ser el tamaño muestral mínimo de la muestra?

Datos del problema: $\sigma = 20$; error = $E \le 2$; igual nivel de confianza = 90% , luego $z_{1-\alpha/2} = 1'645$.

Dé, el error es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 2$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'645\cdot 20}{2}\right)^2 = 270'6025$, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 271 clientes.**

OPCION B

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Justifique cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible: $B + 2C\cdot A$ $\quad A - (B\cdot C)^t$.

b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial: $(1/5)(B + A\cdot X) = C^t$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a)

Justifique cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$B + 2C\cdot A \qquad A - (B\cdot C)^t$.

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda matriz, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz; y para poder sumar (restar) matrices deben de tener el mismo orden.

$B_{2x1} + 2C_{1x2}\cdot A_{2x2}$, **no se puede operar** por lo expresado antes, vemos que se puede multiplicar $C\cdot A$ pero nó se puede sumar.

$A_{2x2} - (B_{2x1}\cdot C_{1x2})^t_{2x2}$ **si se puede operar** por lo expresado antes.

$$A - (B\cdot C)^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}.$$

b)

Resuelva la ecuación matricial: $(1/5)(B + A\cdot X) = C^t$.

Dada la ecuación matricial $(1/5)(B + A\cdot X) = C^t$, tenemos $B + A\cdot X = 5\cdot C^t$, luego $A\cdot X = 5\cdot C^t - B$.

Dada la matriz A, si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (A|I) a (I|D), la matriz D es la inversa de A, es decir $D = A^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} F_1/6 \\ F_2/2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2-F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2 & -1/6 & 1/2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ F_2/2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1/12 & 1/4 \end{array}\right) = (I|A^{-1}),$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 0 = 24$; $A^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Luego sale lo mismo.

Multiplicando la expresión $A\cdot X = 5\cdot C^t - B$, por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(5\cdot C^t - B)$, de donde $I_2\cdot X = A^{-1}\cdot(5\cdot C^t - B)$, es decir $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(5\cdot C^t - B)}$.

$$5C^t - B = 5\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(5\cdot C^t - B) =} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6/12 - (11/4)\cdot(-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$.

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 2 (B)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) (1'3 puntos) Obtenga el valor de "a" para que la función sea continua en x = 0. Para ese valor de "a", ¿sería derivable en x = 0?

b) (1'2 puntos) Para a = 2, estudie su monotonía y extremos relativos.

Solución

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a)

Obtenga el valor de "a" para que la función sea continua en x = 0. Para ese valor de "a", ¿sería derivable en x = 0?

Como tiene que ser continua en x = 0 tenemos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$f(0) = 0^2 - 0 - a = -a$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ((2x + 1)/(1 - 2x)) = (0 + 1)/(1 - 0) = 1$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - x - a) = 0^2 - 0 - a = -a$.

Igualando tenemos $1 = -a$, de donde $\mathbf{a = -1}$.

Veamos si es derivable en x = 0 para "a = -1".

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-2x) - (2x+1)\cdot(-2)}{(1-2x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{(1-2x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para ser derivable en x = 0, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+)$. Estudiamos la continuidad de la derivada.

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (4/(1 - 2x)^2) = 4/(1 - 0)^2 = 4$.

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - 1) = 0 - 1 = -1$.

Como $f'(0^-) = 4 \neq f'(0^+) = -1$, **la función f no es derivable en x = 0 para "a = -1".**

b)

Para a = 2, estudie su monotonía y extremos relativos.

Para a = 2, tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(1-2x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \dfrac{4}{(1-2x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si x < 0, f '(x) = $4/(1 - 2x)^2$.
De f '(x) = 0, tenemos 4 = 0, lo cual es absurdo por tanto f siempre es creciente o decreciente y no tiene extremos relativos en x < 0.

Como f '(-1) = $4/(1 - 2(-1))^2$ = 4/9 > 0, **f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-∞, 0).**

Si x > 0, f '(x) = 2x - 1.
De f '(x) = 0 tenemos 2x - 1 = 0, luego x = 1/2 = 0'5, que será un posible extremo relativo derivable.

Como f '(0'1) = 2(0'1) - 1 = -0'8 < 0, **f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0, 0'5).**

Como f '(1) = 2(1) - 1 = 1 > 0, **f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0'5, + ∞).**

Por tanto f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-∞,0'5)∪ (0'5,+∞), y es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0, 0'5).

Por definición x = 1/2 es un mínimo relativo de f y vale f(1/2) = $(1/2)^2$ - (1/2) - 2 **= -9/4 = -2'25.**

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 3 (B)

Una caja contiene 3 bolas negras, 2 blancas y 1 roja. Se realiza el siguiente experimento aleatorio: “Extraer de esa caja dos bolas al azar, una a continuación de otra sin reposición y anotar el color de las bolas en el orden en que han sido extraídas”.
a) (1 punto) Describa el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio.
b) (1'5 puntos) Indique la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral.

Solución

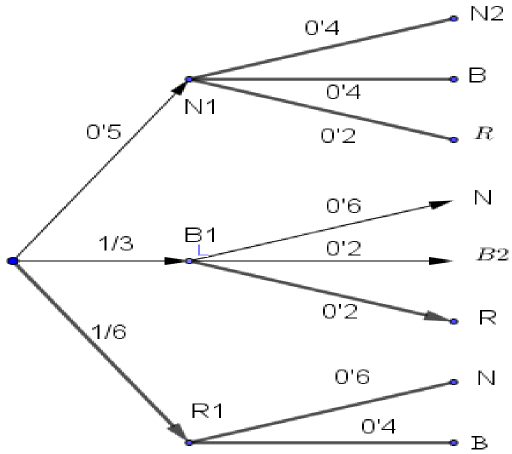
Una caja contiene 3 bolas negras, 2 blancas y 1 roja. Se realiza el siguiente experimento aleatorio: “Extraer de esa caja dos bolas al azar, una a continuación de otra sin reposición y anotar el color de las bolas en el orden en que han sido extraídas”.
a) y b)
Describa el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio.
Indique la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral

Llamemos N1, N2, B1, B2, R1, N, B y R, a los sucesos siguientes, “sacar bola negra en primer lugar”, "sacar bola negra en segundo lugar", “sacar bola blanca en primer lugar”, "sacar bola blanca en segundo lugar", “sacar bola roja en primer lugar”, "sacar bola negra en segundo lugar", “sacar bola blanca en segundo lugar” y "sacar bola roja en segundo lugar", respectivamente.

Como es sin reemplazamiento, en la primera extracción tenemos seis bolas posibles y en la segunda extracción sólo cinco bolas posibles.

Del problema tenemos: p(N1) = 3/6 = 1/2; p(B1) = 2/6 = 1/3; p(R1) = 1/6; p(N2/N1) = 2/5; p(B/N1) = 2/5; p(R/N1) = 1/5; p(N/B1) = 3/5; p(B2/B1) = 1/5; p(R/B1) = 1/5; p(N/R1) = 3/5; p(B/R1) = 2/5; ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio está formado por ocho sucesos elementales:

E = {N1∩N2, N1∩B, N1∩R, B1∩N, B1∩B2, B1∩R, R1∩N, R1∩B}.

Las probabilidades de los sucesos elementales son:

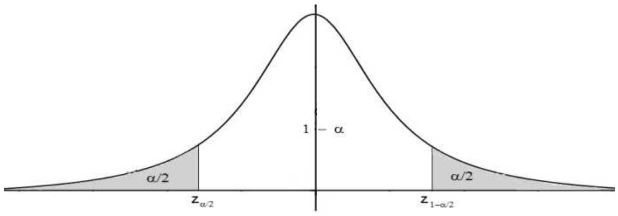
p(N1∩N2) = p(N1)·p(N2/N1) = (0'5)·(0'4) **= 0'2**
p(N1∩B) = p(N1)·p(B/N1) = (0'5)·(0'4) **= 0'2**
p(N1∩R) = p(N1)·p(R/N1) = (0'5)·(0'2) **= 0'1**
p(B1∩N) = p(B1)·p(N/B1) = (1/3)·(0'6) **= 0'2**
p(B1∩B2) = p(B1)·p(B2/B1) = (1/3)·(0'2) **= 1/15**
p(B1∩R) = p(B1)·p(R/B1) = (1/3)·(0'2) **= 1/15**
p(R1∩N) = p(R1)·p(N/R1) = (1/6)·(0'6) **= 0'1**
p(R1∩B) = p(R1)·p(B/R1) = (1/6)·(0'4) **= 1/15**

18_mod2_jun_coli_EJERCICIO 4 (B)

Se quiere estimar la proporción de estudiantes que asiste regularmente al cine. Para ello, se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 300 y se obtiene que de ellos, 210 acuden con regularidad al cine.
a) (1'75 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 92% para estimar la proporción de estudiantes que va al cine regularmente. ¿Qué error máximo se cometería si se diera como estimación de dicha proporción 0'7?
b) (0'75 puntos) Con el mismo nivel de confianza, siendo la proporción muestral la misma, si queremos que el error sea menor que 0'02, ¿cuántos alumnos como mínimo hay que elegir en la muestra?

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$

$= 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$

$= \dfrac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Se quiere estimar la proporción de estudiantes que asiste regularmente al cine. Para ello, se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 300 y se obtiene que de ellos, 210 acuden con regularidad al cine.

a)

Calcule un intervalo de confianza al 92% para estimar la proporción de estudiantes que va al cine regularmente. ¿Qué error máximo se cometería si se diera como estimación de dicha proporción 0'7?

Datos del problema: n = 300, $\hat{p} = \dfrac{210}{300}$ = 0'7, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 – 0'7 = 0'3, nivel de confianza = 92% = 0'92 = 1 - α, de donde α = 0'08, con la cual $\alpha/2$ = (0'08)/2 = 0'04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'04 = 0'96, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'96 no viene, y la más próxima es 0'9599 y corresponde a 1'75, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'75 (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2}$ = 1'751*), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'7 - 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{300}}, 0'7 + 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{300}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'6537;\ 0'7463)}$$

El error máximo es $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, nos dicen que n = 300, $\hat{p}$ = 0'7, $\hat{q}$ = 0'3. Estamos en las mismas condiciones luego $\mathbf{E} \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'75\cdot\sqrt{\dfrac{0'7\cdot 0'3}{300}}$ **= 0'0463.**

b)

Con el mismo nivel de confianza, siendo la proporción muestral la misma, si queremos que el error sea menor que 0'02, ¿cuántos alumnos como mínimo hay que elegir en la muestra?

Datos del problema: nivel de confianza = 92%, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'75, $\hat{p}$ = 0'7, $\hat{q}$ = 0'3, error = E ≤ 0'02.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \dfrac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \dfrac{(1'75)^2\cdot 0'7\cdot 0'3}{(0'02)^2}$ = 1607'8125, por tanto **el tamaño mínimo de estudiantes sería de n = 1608.**