SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS MODELO 2 DEL 2015

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, C = (2 1), D = (1 -1 2).

a) (0'8 puntos) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante: $A\cdot B^t$ $C^t\cdot D$ $B^t\cdot D$ $D\cdot B^t$.
b) (0'5 puntos) Despeje la matriz X en la ecuación $X\cdot A^{-1} + 2B = 3C^t\cdot D$, sin calcular sus elementos.
c) (1'2 puntos) Calcule la matriz $A\cdot(B^t - 2D^t\cdot C)$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, C = (2 1), D = (1 -1 2).

a)
Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante: $A\cdot B^t$ $C^t\cdot D$ $B^t\cdot D$ $D\cdot B^t$.

$A_{3x\mathbf{3}}\cdot B^t_{\mathbf{3}x2}$. **<u>Si</u> se puede multiplicar y la matriz resultante es M_{3x2}.**
$C^t_{2x\mathbf{1}}\cdot D_{\mathbf{1}x3}$. **<u>Si</u> se puede multiplicar y la matriz resultante esN_{2x3}.**
$B^t_{3x\mathbf{2}}\cdot D_{\mathbf{1}x3}$. **<u>No</u> se puede multiplicar.**
$D_{1x\mathbf{3}}\cdot B^t_{\mathbf{3}x2}$. **<u>Si</u> se puede multiplicar y la matriz resultante esN_{1x2}.**

b)
Despeje la matriz X en la ecuación $X\cdot A^{-1} + 2B = 3C^t\cdot D$, sin calcular sus elementos.

Multiplicamos la expresión $X\cdot A^{-1} + 2B = 3C^t\cdot D$ por la derecha por la matriz A.

$X\cdot A^{-1}\cdot A + 2B\cdot A = 3C^t\cdot D\cdot A \rightarrow X\cdot I_3 + 2B\cdot A = 3C^t\cdot D\cdot A \rightarrow X + 2B\cdot A = 3C^t\cdot D\cdot A$, de donde:
$\mathbf{X = 3C^t\cdot D\cdot A - 2B\cdot A}$.

c)
Calcule la matriz $A\cdot(B^t - 2D^t\cdot C)$.

$$\mathbf{A\cdot(B^t - 2D^t\cdot C)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 0 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -9 \\ 13 & 4 \\ -17 & -9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 (A)

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4ºC y 36ºC. La vida en días, en función de la temperatura media T, medida en grados centígrados, viene dada por la función: $V(T) = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16)$, $T \in [4,36]$.

a) (1 punto) Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.
b) (1 punto) Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.
c) (0'5 puntos) Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?

Solución

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4ºC y 36ºC. La vida en días, en función de la temperatura media T, medida en grados centígrados, viene dada por la función: $V(T) = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16)$, $T \in [4,36]$.

a) y b)
Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.
Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.

Me están pidiendo el máximo y mínimo absolutos, que se encontrará en los extremos del intervalo T = 4, T = 36, o entre las soluciones de V '(T) = 0.

De $V(T) = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16)$, $V'(T) = \frac{-1}{16}(2T - 40) = -T/8 + 5/2$

Si V '(T) = 0, tenemos -T/8 + 5/2 = 0, de donde T/8 = 5/2, es decir T = 20.
Sustituimos los valores, 4, 20 y 36 en V(T) y el de mayor valor, es el de vida máxima y el menor valor, es la vida mínima.

$V(4) = \frac{-1}{16}(4^2 - 40(4) + 16) = 8$

$V(T) = \frac{-1}{16}(20^2 – 40(20) + 16) = 24$

$V(T) = \frac{-1}{16}(36^2 – 40(36) + 16) = 5/2 = 8$

El máximo absoluto es T = 20 y vale T(20) = 24 y el mínimo absoluto es T = 4 o T = 36 y vale T(4) = = T(36) = 8, es decir la vida máxima se alcanza para una temperatura de 20º y dura 24 días, y la vida mínima se alcanza para una temperatura de 4º o de 36º y dura 8 días.

c)
Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?

Me piden que resuelva la ecuación $V(T) = 15 = \frac{-1}{16}(T^2 - 40T + 16)$, de donde $T^2 - 40T + 16 = -240$, es decir

$T^2 - 40T - 256 = 0 \rightarrow T = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4\cdot 256}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{40 \pm 24}{2} = \begin{cases} (40+24)/2 = 32 \\ (40-24)/2 = 8 \end{cases}$, **es decir la temperatura media ha sido 8º o 32º.**

EJERCICIO 3 (A)

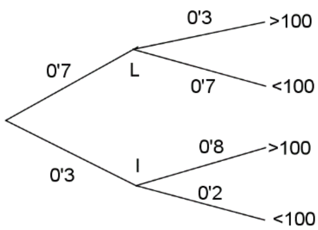
El 70% de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30% supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80% supera esa cantidad.
a) (1'5 puntos) Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €?
b) (1 punto) Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local?

Solución

El 70% de los clientes de un supermercado realizan las compras en el local y el resto de los clientes las realizan por internet. De las compras realizadas en el local, sólo el 30% supera los 100 €, mientras que de las realizadas por internet el 80% supera esa cantidad.

Llamemos L, I, >100 y <100, a los sucesos siguientes, "compra en el local", "compra por internet", supera los 100 €" y "no supera los 100 €", respectivamente.
Datos del problema p(L) = 70% = 0'7; p(>100/L) = 30% = 0'3; p(>100/I) = 80% = 0'8,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Elegida una compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 100 €?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que supere los 100 € es:

p(supere los 100€) = p(>100) = p(L).p(>100/L) + p(I).p(>100/I) = 0’7·0’3 + 0’3·0’8 **= 9/20 = 0’45**.

b)

Si se sabe que una compra supera los 100 €, ¿cuál es la probabilidad de que se haya hecho en el local?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(L/>100) =} \frac{p(L \cap >100)}{p(>100)} = \frac{p(L).p(>100/L)}{p(>100)} = \frac{0'7 \cdot 0'3}{0'45} \textbf{ = (7/25)} \cong \textbf{0'4667}.$$

EJERCICIO 4 (A)

(2’5 puntos) Una característica poblacional X sigue una distribución Normal N(μ,2’1). Sobre ella se formula un contraste de hipótesis bilateral con H_0: μ = 5’5 a un nivel de significación del 8%. Se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 25 que proporciona una media muestral de 6’3. Plantee dicho contraste, determine su región crítica y razone si se puede aceptar la hipótesis nula.

Solución

(2’5 puntos) Una característica poblacional X sigue una distribución Normal N(μ,2’1). Sobre ella se formula un contraste de hipótesis bilateral con H_0 : μ = 5’5 a un nivel de significación del 8%. Se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 25 que proporciona una media muestral de 6’3. Plantee dicho contraste, determine su región crítica y razone si se puede aceptar la hipótesis nula.

Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestra, y es parecido a los intervalos de confianza.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: H_0: μ = 5’5, n = 25, desviación típica = σ = 2’1, $\overline{x}$ = 6’3; nivel de significación = α = 8% = = 0’08.

El problema la dividimos en cinco etapas

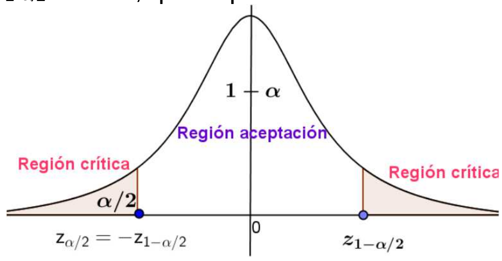
Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: μ = 5’5 y H_1: μ ≠ 5’5, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste bilateral, por tanto la región crítica está a la izquierda y a la derecha de los puntos críticos* - $z_{1-\alpha/2}$ *y* $z_{1-\alpha/2}$.

Etapa 2: Calculamos los puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0’08, con lo cual α/2 = 0,08/2 = 0’04.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 – 0’04 = 0’96, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’96 no viene, y que la más cercana es 0’9599, con lo cual obtenemos $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75, por tanto tenemos por **valores críticos** - $z_{1-\alpha/2}$ = -1’75 y $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es Z = $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número z_0 = $\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{6'3 - 5'5}{2'1/\sqrt{25}} \cong$ 1’9048.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 1’9048 **es mayor que el valor crítico** $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75, vemos que se encuentra en la zona de rechazo. Por tanto, tomamos la **decisión de rechazar**

la aceptar hipótesis nula H_0: $\mu = 5'5$ y **aceptamos la hipótesis alternativa H_1**: $\mu \neq 5'5$, en nuestro caso parece $\mu > 5'5$, con un nivel de significación del 8%.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

(2'5 puntos) Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B.
Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos.
El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.
Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?

Solución

Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B.
Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos.
El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.
Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de trajes.
Sea y = nº de abrigos.
Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Kilos de manzanas	Kilos de naranjas	Precios
Bolsa A (x)	3	1	4 €
Bolsa B (y)	2	2	3 €
Total	600 kg	400 kg	

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

De "bolsa A contienen 3 kg de manzanas y bolsa de tipo B incluyen 2 kg" $\rightarrow$ $3x + 2y \le 600$.
De "bolsa B contienen 1 kg de naranjas y bolsa de tipo B incluyen 2 kg" $\rightarrow$ $x + 2y \le 400$.
De "se elabora alguna bolsa tipo A y tipo B" $\rightarrow$ $x \ge 0$, $y \ge 0$.
De "¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?", tenemos la función a optimizar es $I(x,y) = F(x,y) = 4x + 3y$.

Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 4x + 3y$.
Restricciones: $3x + 2y \le 600$; $x + 2y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

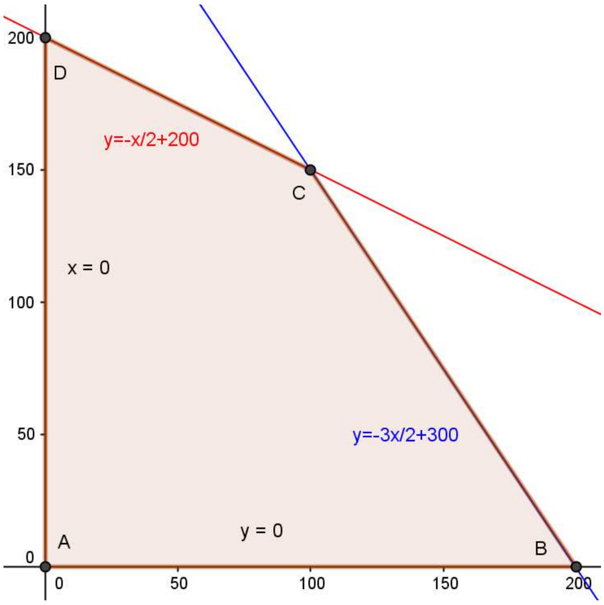
Las desigualdades $3x + 2y \le 600$; $x + 2y \le 400$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $3x + 2y = 600$; $x + 2y = 400$; $x = 0$; $y = 0$
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -3x/2 + 300; \quad y = -x/2 + 200; \quad x = 0; \quad y = 0$$

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice A(0,0).
De $y = 0$ e $y = -3x/2+300$, tenemos $0 = -3x/2+300 \rightarrow 3x = 600$, y el vértice es B(200,0).
De $y = -x/2+200$ e $y = -3x/2+300$, tenemos $-x/2+200 = -3x/2 + 300 \rightarrow -x+400 = -3x + 600 \rightarrow$
$\rightarrow 2x = 200$, con lo cual $x = 100$ e $y = -(100)/2+200 = 150$, y el vértice es C(100,150).
De $x = 0$ e $y = -x/2 + 200$, tenemos $y = 200$, y el vértice es D(0,200).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(200,0), C(100,150) y D(0,200).

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, que es el polígono convexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = 4x + 3y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(200,0), C(100,150) y D(0,200). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 4(0) + 3(0) = 0; F(200,0) = 4(200) + 3(0) = 800;
F(100,150) = 4(100) + 3(150) **= 850**; F(0,200) = 4(0) + 3(200) = 600.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 850** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(100,150), por tanto <u>el máximo ingreso es de 850 €, y se obtiene elaborando 100 bolsas tipo A y 150 bolsa tipo B</u>.**

EJERCICIO 2 (B)

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) (0'9 puntos) $f(x) = \dfrac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}$.

b) (0'8 puntos) $g(x) = (x^2 - x + 1)\cdot e^{5x}$.

c) (0'8 puntos) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$.

Solución

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}$. b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\cdot e^{5x}$. c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$.

a) $f(x) = \dfrac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}$; $f'(x) = \dfrac{2\cdot 2(1-3x)\cdot(-3)\cdot(1+3x) - 2(1-3x)^2\cdot 3}{(1+3x)^2} = \dfrac{-6\cdot(1-3x)\cdot(2\cdot(1+3x) + (1-3x))}{(1+3x)^2} =$

$= \dfrac{-6\cdot(1-3x)\cdot(3+3x)}{(1+3x)^2}$.

b) $g(x) = (x^2 - x + 1)\cdot e^{5x}$; $g'(x) = (2x - 1)\cdot e^{5x} + (x^2 - x + 1)\cdot e^{5x}.(5) = e^{5x}.(5x^2 - 3x + 4)$.

c) $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$; $h'(x) = \dfrac{(2x+1)\cdot\log(e)}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(2x+1)}{(x^2 + x + 1)\cdot\ln(10)}$

EJERCICIO 3 (B)

Sean dos sucesos A y B tales que P(A) = 0'25, P(B) = 0'6, $P(A \cap B^C) = 0'1$.

a) (0’75 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra A y ocurra B.
b) (0’75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B.
c) (0’5 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.
d) (0’5 puntos) ¿Son independientes A y B?

Solución

Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0'25$, $P(B) = 0'6$, $P(A\cap B^C) = 0'1$.

a)
Calcule la probabilidad de que ocurra A y ocurra B.

Del problema tenemos: $p(A) = 0'25$, $p(B) = 0'6$ y $p(A\cap B^C) = 0'1$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **$p(A$ y $noB) = p(A\cap B^C) = 0'1$**.

De $p(A\cap B^C) = 0'1 = p(A) - p(A\cap B). = 0'25 - p(A\cap B)$, tenemos *$p(A\cap B) = 0'25 - 0'1 = 0'15$*.

b)
Calcule la probabilidad de que no ocurra A pero sí ocurra B.

Me piden **$p(noA$ y $B) = p(A^C\cap B) = p(B\cap A^C) =$** $p(B) - p(A\cap B) = 0'6 - 0'15$ **$= 0'45$.**

c)
Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

Me piden **$p(A/B)$** $= \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = (0'15)/(0'6)$ **$= 1/4 = 0'25$**.

d)
¿Son independientes A y B?

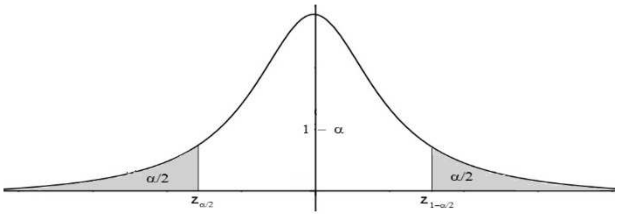
A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.
Como **$p(A\cap B) = 0'15 = p(A)\cdot p(B)$** $= 0'25\cdot 0'6$ **$= 0'15$, los sucesos A y B son independientes.**

EJERCICIO 4 (B)

Se ha lanzado un dado 400 veces, y en 72 de ellas ha salido un tres.
a) (2 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 99’2%, para la proporción de veces que se obtiene un tres.
b) (0’5 puntos) Calcule el error máximo admisible cometido con ese intervalo.

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ o $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$, de donde el tamaño de la muestra es $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Se ha lanzado un dado 400 veces, y en 72 de ellas ha salido un tres.
a)
Calcule un intervalo de confianza, al 99’2%, para la proporción de veces que se obtiene un tres.

Datos del problema: $\hat{p} = 72/400 = 0'18$, $\hat{q} = 1 - 0'18 = 0'82$, n = 400, nivel de confianza $1 - \alpha = 99'2\% =$ $= 0'992$, de donde $\alpha = 0'008 = 0'8\%$ como *nivel de significación*.
De $\alpha = 0'008$ tenemos $\alpha/2 = 0'004$

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'004 = 0'996$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’996 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'65$. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'18 - 2'65\cdot\sqrt{\frac{0'18\cdot 0'82}{400}}, 0'18 + 2'65\cdot\sqrt{\frac{0'18\cdot 0'82}{400}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0’1291; 0’2309)**
b)
Calcule el error máximo admisible cometido con ese intervalo.

El error máximo admisible es el radio del intervalo, es decir: **Error = E** $\le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$

$= 2'65\cdot\sqrt{\frac{0'18\cdot 0'82}{400}} \cong$ **0’0509048377.**