Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Del año 2016

Sea la función f : (0,+∞) → R definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota logaritmo neperiano.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1'5 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución

Sea la función f : (0,+∞) → R definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota logaritmo neperiano.

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \ln(0+)\cdot\frac{1}{0^+} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$, la **recta x = 0 es una asíntota vertical de** f(x).

Como $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f(x) en +∞.**

Como hay asíntota horizontal en +∞, **no hay asíntota oblicua en +∞.**

Como $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - 0) = 0^+$, la *gráfica de f está por encima de la recta y = 0* en +∞.

b)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x) - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

De f '(x) = 0, tenemos 1 – ln(x) = 0, es decir ln(x) = 1 de donde $x = e^1 = e \cong 2'71$, que será el posible extremo relativo.

Como $f'(1) = \frac{1-\ln(1)}{1^2} = \frac{1-0}{1^2} = 1 > 0 <$ 0, f es estrictamente creciente (↗) en (0,e).

Como $f'(3) = \frac{1-\ln(3)}{3^2} = \frac{1-0}{3^2} \cong -0'0109 < 0 <$ 0, f es estrictamente decreciente (↘) en (e,+∞).

Por definición x = e es un máximo relativo y vale $f(e) = \frac{\ln(e)}{e}$ = 1/e.

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] De la función f : R → R definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde a, b ∈ R se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en x = 0 y que $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b.

Solución

De la función f : R → R definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde a, b ∈ R se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en x = 0 y que $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b.

Si tiene su gráfica tiene tangente horizontal en x = 0, sabemos que f '(0) = 0.
$f(x) = ae^x - bx$, $f'(x) = ae^x - b$.
De f '(0) = 0, tenemos $ae^0 - b = 0$, es decir a – b = 0, por tanto **a = b.**

De $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$, tenemos: $e - \frac{3}{2} = \int_0^1 (ae^x - ax)dx = \left[ae^x - a\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (ae^1 - \frac{a}{2}) - (ae^0 - 0) = ae - \frac{3}{2}$,

igualando vemos que **a = 1 = b.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 4   Del año 2016

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) [1'75 puntos] Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz A - λI, siendo I la matriz identidad de orden tres.

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema dado por $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a)

Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz A - λI, siendo I la matriz identidad de orden tres.

$$C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda-4+2\lambda+\lambda^2) = (2-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2).$$

De $6-5\lambda+\lambda^2 = 0$ tenemos $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$.

Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 2$, det(C) $\neq$ 0, luego rango(C) = rango(A - λI) = 3.

Si $\lambda = 2$, $C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{F_3+2F_2} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como tenemos dos filas con números distintos de cero resulta que rango(C) = rango(A - λI) = 2.

Si $\lambda = 3$, $C = A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{F_3+F_2} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como tenemos dos filas con números distintos de cero resulta que rango(C) = rango(A - λI) = 2.

b)

Resuelve el sistema dado por $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El sistema dado es equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = \end{cases}$, de donde y = 0 = z. **La solución del sistema es (x,y,z) = (a,0,0) con a $\in$ R.**

Ejercicio 4 opción A, modelo 4   Del año 2016

Sea "r" la recta dada por $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ y sea "s" la recta definida por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Sea "r" la recta dada por $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ y sea "s" la recta definida por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

a) y b)
Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s. Distancia de "r" a "s"

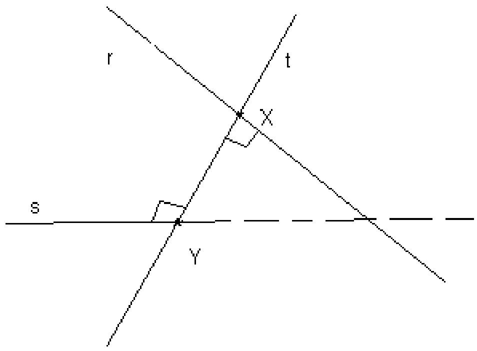
Para ver que las rectas r(A;**u**) y s(B;**v**) se cruzan tengo que ver que **u** y **v** no son paralelos o proporcionales, y después comprobar que det(**AB,u,v**) $\neq$ 0.

De "r" $\equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = 1 - a \\ y = -1 \\ z = a \end{cases}$, con a $\in$ R. Punto A(1,-1,0) y vector **u** = (-1,0,1)

De "s" $\equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in$ R. Punto B(2,2,2) y vector **v** = (1,0,2). Evidentemente **u** y **v** no son proporcionales.

AB = (1,3,2). Como det(**AB,u,v**) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-3)\cdot(-3) = 9 \neq 0$, las rectas "r" y "s" se cruzan.

Para calcular la recta "t" perpendicular a ambas y la distancia entre ellas, tomamos los puntos X e Y que están a mínima distancia entre ellas, como se indica en la figura.



Calculamos los puntos X e Y de intersección de cada una de las rectas con la recta perpendicular común a ambas, para lo cual tomamos un punto genérico X e Y de cada una de ellas, formamos el vector **XY** y le imponemos la condición de que dicho vector sea perpendicular a cada recta. Una vez que obtengamos los puntos X e Y tenemos la recta perpendicular pasa por el punto X y tiene vector director el **XY**, y la distancia entre ellas es d(r;s) = d(X;Y) = **||XY||**

X punto genérico de "r", X(1-a, -1, a) con a$\in$R

Y punto genérico de "s", Y(2+b, 2, 2+2b) con b$\in$R

Vector **XY** = (1+a+b , 3, 2+2b-a)

Un vector director de "r" es **u** = (-1,0,1)

Como **XY** $\perp$ "r" $\rightarrow$ **XY** $\perp$ **u** $\rightarrow$ **XY** $\bullet$ **u** = 0, es decir

(1+a+b , 3, 2+2b-a)$\bullet$(-1,0,1) = 0 = -1-a-b+2+2b-a = *1+b-2a = 0*

Un vector director de "s" es **v** = (1,0,2)

Como **XY** $\perp$ "s" $\rightarrow$ **XY** $\perp$ **v** $\rightarrow$ **XY** $\bullet$ **v** = 0, es decir

(1+a+b , 3, 2+2b-a)$\bullet$(1,0,2) = 0 = 1+a+b+4+4b-2a = *5+5b-a = 0*

Resolviendo el sistema

1+b-2a = 0

5+5b-a = 0, ($F_2 - 5F_1$) obtenemos 9a = 0, de donde a = 0 y b = - 1, por tanto los puntos X e Y son

X(1-a, -1, a) = X(1, -1, 0)

Y(2+b, 2, 2+2b) = Y(1, 2, 0)

El vector **XY** es **XY** = (0, -3, 0), la recta perpendicular a ambas es "t" $\equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, y la distancia entre ellas

es d(r;s) = d(X;Y) = ||**XY**|| = $\sqrt{(0^2+3^2+0^2)} = \sqrt{(9)}$ = 3 u.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] Sea f : R→R la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa x = 1 y un punto de inflexión en (−1,5).

Solución

Sea f : R→R la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa x = 1 y un punto de inflexión en (−1,5).

Si tiene su gráfica tiene tangente horizontal en x = 1, sabemos que *f '(1) = 0*.
Si (−1,5) es punto de inflexión, por punto de inflexión *f ''(-1) = 0*, y por punto *f(-1) = 5*.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.
De $f''(-1) = 0 \rightarrow 6(-1) + 2a = 0$, de donde **a = 3**.
De $f'(1) = 0 \rightarrow 3(1)^2 + 2(3)(1) + b = 0$, de donde **b = -9**.
De $f(-1) = 0 \rightarrow (-1)^3 + 3(-1)^2 + (-9)(-1) + c = 0$, de donde **c = -11**.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Del año 2016

[2'5 puntos] Considera la función f : R → R definida por $f(x) = \frac{3x\cdot(2m - x)}{m^3}$, con m > 0.

Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = \frac{3x\cdot(2m - x)}{m^3}$, con m > 0.

Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

La gráfica de $f(x) = \frac{3x\cdot(2m - x)}{m^3} = \frac{1}{m^3}\cdot(6mx - 3x^2)$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (el número que multiplica a x^2 es negativo) y corta en x = 0 y x = 2m (soluciones de f(x) = 0).

$$\text{Área} = \int_0^{2m} \frac{1}{m^3}\cdot(6mx - 3x^2)dx = \frac{1}{m^3}\cdot\left[3mx^2 - x^3\right]_0^{2m} = \frac{1}{m^3}\cdot\left[(3m(2m)^2 - (2m)^3) - (0)\right]u^2 = \frac{12m^3 - 8m^3}{m^3}u^2 = 4u^2$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Del año 2016

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Discútelo según los valores de λ.
b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $\lambda = 0$.
c) [0'75 puntos] Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que z = 2. Calcula esa solución.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$

a) y b)
Discútelo según los valores de λ. Resuélvelo para $\lambda = 0$.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

En A, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1\cdot(\lambda^2 - \lambda) = \lambda\cdot(\lambda - 1) = 0.$

De $\det(A) = 0$, tenemos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, det(A) $\neq$ 0, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, solución única.**

Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (terminante triangular), rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

Si $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por que tiene una fila de cero, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.
Como rango = 2, dos ecuaciones y dos incógnitas principales:
$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad + z = 0 \end{cases}$, tenemos z = 0 y x = 1 - y, tomando y = a $\in$ R la **solución es (x,y,z) = (1 - a,a,0)** con a$\in$R.

c)
Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que z = 2. Calcula esa solución.

De $\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \;\; F_3 - F_2 \end{cases} \approx \begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ (\lambda - 1)z = \lambda \end{cases}$, en la última ecuación tenemos $(\lambda - 1)\cdot 2 = \lambda$, de donde $2\lambda - 2 = \lambda$, luego $\lambda = 2$. Entrando en la ecuación anterior 2y + 2 = 0, es decir y = -1; y entrando en la primera ecuación x + 3(-1) + 2 = 1, de donde x = 2.

Si z = 2, λ = 2, y = -1 y x = 2. Solución (x,y,z) = (2,-1,2)

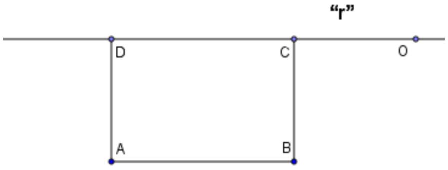
Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Del año 2016

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1,1,0) y B(2,2,1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:
a) [0'75 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

b) [1 punto] Calcula el área del triángulo ABC.
c) [0'75 puntos] Determina las coordenadas del punto D.

Solución

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1,1,0) y B(2,2,1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:
a)
Halla unas ecuaciones paramétricas de r.



La recta "r" pasa por el punto O(0,0,0) y tiene vector director el **AB** = (1,1,1). Ecuación $r \equiv \begin{cases} x = 0 + a \\ y = 0 + a \\ z = 0 + a \end{cases}$, con $a \in R$.

b) y c)
Calcula el área del triángulo ABC. Determina las coordenadas del punto D.

C y D son puntos genéricos de "r" de coordenadas C(c,c,c) y D(d,d,d). **AD** = (d-1,d-1,d), **BC** = (c-2,c-2,c-1)
El vector **AD** es perpendicular al **AB** → **AD•AB** = 0 → (d-1,d-1,d)• (1,1,1) = 0 = d-1+d-1+d = 3d-2=0, **d=2/3,** y el **punto D es D(2/3, 2/3, 2/3).**
El vector **BC** es perpendicular al **AB** → **BC•AB** = 0 → (c-2,c-2,c-1)• (1,1,1) = 0 = c-2+c-2+c-1= 3c-5=0, **c=5/3,** y el punto C es C(5/3,5/3,5/3), de donde **BC** = (-1/3,-1/3,2/3)
El **área del triángulo es** = (1/2)·base·altura = (1/2)·|**AB**|·|**BC**| = $(1/2)\cdot\sqrt{(1^2+1^2+1^2)}\cdot\sqrt{((1/3)^2+(1/3)^2+(2/3)^2)}$ =
= $(1/2)\cdot\sqrt{(3)}\cdot\sqrt{((6/9))}$ u^2 = **$(1/2)\cdot\sqrt{(2)}$ u^2**