OPCIÓN A

16_mod5_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1'7 puntos) Resuelva la ecuación matricial C·B·X − 2A·X = A^t.

b) (0'8 puntos) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: B·C + 2A, A·C + C, B^t·C, C · B − A.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

Resuelva la ecuación matricial C·B·X − 2A·X = A^t.

De C·B·X − 2A·X = A^t, sacando factor común X por la derecha tenemos (C·B – 2A)·X = A^t.

Llamamos D a la matriz C·B – 2A.

$$D = C\cdot B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La ecuación (C·B – 2A)·X = A^t se reduce a la ecuación D·X = A^t. Como det(D) = |D| = $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ = 3-9 = -6 $\neq$ 0, la matriz D tiene matriz inversa $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t)$. Multiplicando la expresión D·X = A^t por la izquierda por la matriz D^{-1}, tenemos $D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\cdot A^t \rightarrow I\cdot X = D^{-1}\cdot A^t \rightarrow$ **$X = D^{-1}\cdot A^t$**.

$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t)$, det(D) = -6 , $D^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $Adj(D^t) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t) = \frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$,

luego: **$X = D^{-1}\cdot A^t$** = $\frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 5/6 & -1/2 \end{pmatrix}$

b)

Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: B·C + 2A, A·C + C, B^t·C, C·B − A.

Para poder multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª matriz tiene que coincidir con el número de filas de la 2ª matriz, y la matriz producto tiene filas de la 1ª y columnas de la 2ª.
Para poder sumar matrices deben de tener el mismo orden.

B·C + 2A = $B_{3x\mathbf{2}}\cdot C_{\mathbf{2}x3} + 2A_{2x2}$, **si se puede multiplicar B·C** y sale una matriz 3x3, **pero no se puede sumar con A** porque A tiene orden 2x2.

A·C + C = $A_{2x\mathbf{2}}\cdot C_{\mathbf{2}x3} + C_{2x3}$, **si se puede multiplicar A·C** y sale una matriz 2x3, **que si se puede sumar con C** porque también tiene orden 2x3.

B^t·C = $B^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{2}x2}\cdot$ **no se puede multiplicar**.

C·B − A = $C_{2x\mathbf{3}}\cdot B_{\mathbf{3}x2} - A_{2x2}$, **si se puede multiplicar C·B** y sale una **matriz de orden 2x2**, que **se puede sumar con A que también tiene orden 2x2**.

16_mod5_EJERCICIO 2 (A)

(2'5 puntos) Una fábrica produce entre 1000 y 6000 bombillas al día. El coste diario de producción, en euros, de x bombillas viene dado por la función

C(x) = 9000 + 0'08x + (2000000)/x , con 1000 ≤ x ≤ 6000.

¿Cuántas bombillas deberían producirse diariamente para minimizar costes? ¿Cuál sería dicho coste?

Solución

Una fábrica produce entre 1000 y 6000 bombillas al día. El coste diario de producción, en euros, de x bombillas viene dado por la función

$$C(x) = 9000 + 0'08x + (2000000)/x \;,$$
$$\text{con } 1000 \le x \le 6000.$$

¿Cuántas bombillas deberían producirse diariamente para minimizar costes? ¿Cuál sería dicho coste?

Me están pidiendo el mínimo absoluto de la función C(x), que sabemos se puede encontrar en los extremos del intervalo, x = 1000, x = 6000 y los números "x" solución de C '(x) = 0, porque C(x) es continua y derivable en R – {0}.

Tenemos C '(x) = 0'08 – (2000000)/x^2.
De C '(x) = 0, tenemos 0'08 – (2000000)/x^2 = 0 $\rightarrow$ 0'08 = (2000000)/x^2 $\rightarrow$ x^2 = (2000000)/(0'08) = = 25000000 $\rightarrow$ x = $\pm\sqrt{(25000000)}$ = ± 5000. De estas dos soluciones sólo x = 5000 está en el intervalo [1000,6000].
Evaluamos en C(x), x= 1000, x = 5000 y x = 6000. El valor mas pequeño será el mínimo absoluto.

C(1000) = 9000 + 0'08(1000) + (2000000)/(1000) = 11080.
C(5000) = 9000 + 0'08(5000) + (2000000)/(5000) = **9800**.
C(6000) = 9000 + 0'08(6000) + (2000000)/(6000) = 9813'33.
Por tanto para reducir costes, deben de fabricarse diariamente 5000 bombillas y el coste sería de 9800 €.

16_mod5_EJERCICIO 3 (A)
El 60% de los jóvenes de una ciudad usa Facebook, el 80% usa WhatsApp y el 4% usa Facebook pero no WhatsApp.
a) (0'5 puntos) Halle el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que usa ambas aplicaciones.
b) (0'75 puntos) Calcule el porcentaje de esos jóvenes que usa WhatsApp pero no Facebook.
c) (0'75 puntos) Entre los jóvenes que usan WhatsApp, ¿qué porcentaje usa también Facebook?
d) (0'5 puntos) Los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp", ¿son independientes?

Solución

El 60% de los jóvenes de una ciudad usa Facebook, el 80% usa WhatsApp y el 4% usa Facebook pero no WhatsApp.
a)
Halle el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que usa ambas aplicaciones.

Sean las sucesos W = "usar WhatsApp" y F = "usar Facebook".
Datos del problema: p(F) = 60% = 0'6, p(W) = 80% = 0'8, p(F y noW) = $p(F\cap W^C)$ = 4% = 0'04.
Me piden **p(usar ambas) = p(F y W)** = $p(F\cap W)$ = {**} **= 0'56 = 56%**
{**} de $p(F\cap W^C)$ = 4% = 0'04 = p(F) - $p(F\cap W)$, tenemos 0'04 = 0'6 - $(F\cap W)$, luego $(F\cap W)$ = 0'6-0'04= 0'56.
b)
Calcule el porcentaje de esos jóvenes que usa WhatsApp pero no Facebook.
Me piden **p(W y noF) = $p(W\cap F^C)$ =** p(W) - $p(F\cap W)$ **= 0'8 - 0'56 = 0'24 = 24%**
c)
Entre los jóvenes que usan WhatsApp, ¿qué porcentaje usa también Facebook?

Me piden **p(F sabiendo que usa W) = p(F/W) =** $\dfrac{p(F\cap W)}{p(W)}$ = 0'56/0'8 **= 0'70 = 70%.**

d)
Los sucesos "usar Facebook" y "usar WhatsApp", ¿son independientes?

F y W son independientes si $p(F\cap W) = p(F)\cdot p(W)$.
Como **$p(F\cap W)$ = 0'56 ≠ p(F)·p(W)** = 0'6·0'8 **= 0'48**, **los sucesos F y W no son independientes.**

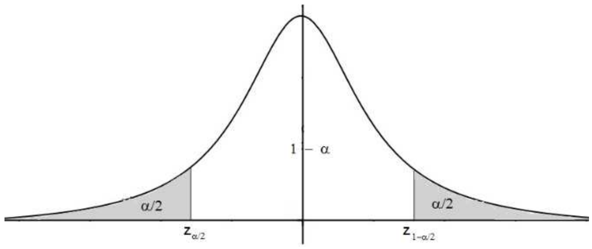
16_mod5_EJERCICIO 4 (A)
a) (1'5 puntos) La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser (164'86, 171'14) en cm.
Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.
b) (1 punto) En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?

Solución

a)

La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser (164'86, 171'14) en cm.
Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b); observamos que b + a = 2· $\overline{x}$, de donde $\overline{x}$ = (a + b)/2.

También sabemos que $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: **I.C.(μ) =** (164'86, 171'14), de donde $\overline{x}$ **=** (164'86 + 171'14)/2 **= 168**; σ = 8; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = (0'05)/2 = 0'025.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 1'96, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

Por tanto la talla media de la muestra es $\overline{x}$ **= 168 cm.**

De los datos del problema tenemos que el *error es E =* $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = (b - a)/2 = (171'14 - 164'86)/2 = *3'14.*

Como nos preguntan el tamaño muestral mínimo "n" necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior, tenemos que el nuevo error es E' = (3'14)/2 = 1'57, se sigue manteniendo σ = 8 y $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E'}\right)^2 = = \left(\frac{1'96 \cdot 8}{1'57}\right)^2 \cong$ 99'74, tenemos que **el tamaño mínimo es de n = 100 individuos, para reducir el error a la mitad.**

b)

En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra es $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso tenemos, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$ y $n_3 = 15$, con lo cual $n = n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 7 + 15 = 27$, de donde:

$\frac{n}{N} = \frac{27}{243} = \frac{5}{N_1} = \frac{7}{N_2} = \frac{15}{N_3}$

De $\frac{27}{243} = \frac{5}{N_1}$, tenemos $N_1 = \frac{5 \cdot 243}{27}$ = 45, luego **los usuarios que practican Yoga son n = 45 personas**.

De $\frac{27}{243} = \frac{7}{N_2}$, tenemos $N_2 = \frac{7 \cdot 243}{27}$ = 63, luego **los usuarios que practican Pilates son n = 63 personas**.

De $\frac{27}{243} = \frac{15}{N_3}$, tenemos $N_3 = \frac{15 \cdot 243}{27}$ = 135, luego **los usuarios que practican Mantenimiento son n = 135 personas**.

OPCION B

16_mod5_EJERCICIO 1 (B)

(2'5 puntos) Una empresa fabrica dos tipos de agua de colonia, A y B. La colonia A contiene un 5% de extracto de rosas y un 10% de alcohol, mientras que la B se fabrica con un 10% de extracto de rosas y un 15% de alcohol. El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro. Se dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol. ¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo?

Solución

Una empresa fabrica dos tipos de agua de colonia, A y B. La colonia A contiene un 5% de extracto de rosas y un 10% de alcohol, mientras que la B se fabrica con un 10% de extracto de rosas y un 15% de alcohol. El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro. Se dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol. ¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de colonias tipo A.

Sea y = nº de colonias tipo B.

Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Extracto Rosas	Alcohol	Precio
Colonia A (x)	5% = 0'05	10% = 0'1	24 €/litro
Colonia B (y)	10% = 0'1	15% = 0'15	40 €/litro
Total	70 litros	120 litros	

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

De "Extracto rosas, Colonia A, 5% = 0'05 y Colonia B, 10% = 0'1" $\rightarrow$ 0'05x + 0'1y ≤ 70.

De "Alcohol, Colonia A, 10% = 0'1 y Colonia B, 15% = 0'15" $\rightarrow$ 0'1x + 0'15y ≤ 120.

De "se fabrica alguna colonia tipo A y B" $\rightarrow$ x ≥ 0, y ≥ 0.

De "El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro", tenemos que la función a optimizar es F(x,y) = 24x + 40y.

Resumiendo:

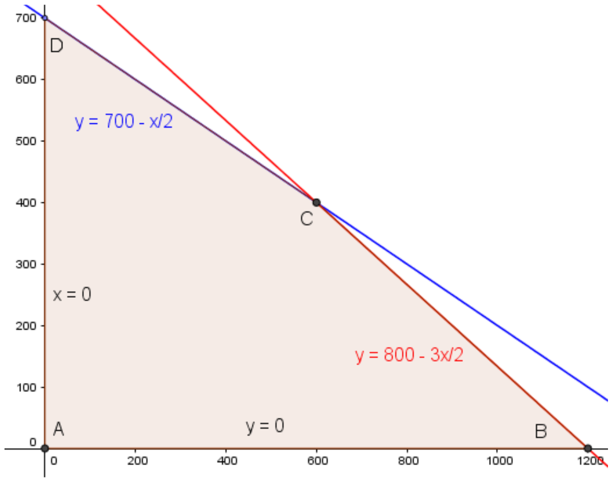
Función a optimizar es F(x,y) = 24x + 40y.

Restricciones: 0'05x + 0'1y ≤ 70; 0'1x + 0'15y ≤ 120; x ≥ 0; y ≥ 0

Las desigualdades 0'05x + 0'1y ≤ 70; 0'1x + 0'15y ≤ 120; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, 0'05x + 0'1y = 70; 0'1x + 0'15y = 120; x = 0; y = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos:
y = 70/0'1 - 0'05x/0'1 = 700 – x/2; y = 120/0'15 - 0'1x/0'15 = 800 – 2x/3; x = 0; y = 0

Dibujamos las rectas, y = 700 – x/2; y = 800 – 2x/3; x = 0; y = 0, tenemos en cuenta las desigualdades, y señalamos el polígono convexo o región factible y después sacaremos los vértices de dicho polígono convexo.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el punto de corte A(0,0).
De y = 0 e y = 800 – 2x/3, tenemos 0 = 800 – 2x/3 → 800 = 2x/3 → x = 1200, y el punto de corte es B(1200,0).
De y = 700 – x/2 e y = 800 – 2x/3, tenemos 700 – x/2 = 800 – 2x/3, luego 4200 – 3x = 4800 – 4x, de donde x = 600 e y = 700 – (600)/2 = 400, y el punto de corte es C(600,400).
De x = 0 e y = 700 – x/2, tenemos y = 700, y el punto de corte es D(0,700).

Observamos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(1200,0), C(600,400) y D(0,700).

¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo?

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F(x,y) = 24x + 40y en los vértices anteriores: A(0,0), B(1200,0), C(600,400) y D(0,700). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,0) = 24(0) + 40(0) = 0$; $F_B(1200,0) = 24(1200) + 40(0) = 28800$;
$\mathbf{F_C(600,400)} = 24(600) + 40(400)$ **= 30400**; $F_D(0,700) = 24(0) + 40(700) = 28000$;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 30400** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(600,400), es decir la venta máxima es de 30400 € fabricando 600 litros de la colonia A y 400 litros de la colonia B.**

16_mod5_EJERCICIO 2 (B)
Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t) = \begin{cases} 4t & \text{si} \quad 0 \le t < 10 \\ -\dfrac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & \text{si} \quad 10 \le t \le 25 \end{cases},$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de B en el intervalo [0, 25].
b) (1 punto) Estudie la monotonía de esta función y determine en qué año fueron mayores los beneficios de esta empresa y cuál fue su beneficio máximo.
c) (0'5 puntos) Represente gráficamente esta función.

Solución

Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \le t < 10 \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & \text{si } 10 \le t \le 25 \end{cases},$$

a)

Estudie la continuidad y derivabilidad de B en el intervalo [0, 25].

La función "4t" es continua y derivable en todo R, en particular en 0 < t < 10
La función "$-t^2/5 + 8t - 20$" es continua y derivable en todo R, en particular en 10 < t < 50

Falta ver la continuidad y derivabilidad en t = 10.
Estudiamos la continuidad en t = 10.

B(t) es continua en t = 10 si $B(10) = \lim_{t\to 10^-} B(t) = \lim_{t\to 10^+} B(t)$.

$\lim_{t\to 10^-} B(t) = \lim_{t\to 10^-} (4t) = 4(10) = 40.$

$B(10) = \lim_{t\to 10^+} B(t) = \lim_{t\to 10^+} (-t^2/5 + 8t - 20) = -(10)^2/5 + 8(10) - 20 = 40.$

Como los valores son iguales, **B(t) es continua en t = 10 y por tanto en [0, 25]**.

B(t) es derivable en t = 10 si $B'(10^-) = B'(10^+)$ (Vemos la continuidad de la derivada.

$$B(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \le t < 10 \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & \text{si } 10 \le t \le 25 \end{cases}, \quad B'(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 < t < 10 \\ -\frac{2t}{5} + 8 & \text{si } 10 \le t < 25 \end{cases},$$

$B'(10^-) = \lim_{t\to 10^-} B'(t) = \lim_{t\to 10^-} (t) = 4.$

$B'(10^+) = \lim_{t\to 10^+} B'(t) = \lim_{t\to 10^+} (-2t/5 + 8) = -2(10)/5 + 8 = 4.$

Como $B'(10^-) = B'(10^+) = 4$, **la función B(t) es derivable en t = 10, y por tanto en (0,25)**.

b)

Estudie la monotonía de esta función y determine en qué año fueron mayores los beneficios de esta empresa y cuál fue su beneficio máximo.

$$\text{Tenemos } B(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \le t < 10 \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & \text{si } 10 \le t \le 25 \end{cases}, \quad B'(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 < t < 10 \\ -\frac{2t}{5} + 8 & \text{si } 10 \le t < 25 \end{cases},$$

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada B '(x).

Si 0 < t < 10, B '(t) = 4.
De B '(t) = 0, tenemos 4 = 0, lo cual es absurdo, es decir B(t) siempre es creciente o decreciente en 0 < t < 10.

Como B '(5) = 4 > 0, **B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,10).**

Si $10 \le t < 25$, B '(t) = -2t/5 + 8.
De B '(t) = 0, tenemos -2t/5 + 8 = 0, tenemos 2t/5 = 8, es decir *t = 20 que será un posible extremo relativo*.

Como B '(15) = -2(15)/5 + 8 = 2 > 0, **B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (10,20).**

Como B '(22) = -2(22)/5 + 8 = -4/5 = -0'8 < 0, **B(t) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (20,25).**

Por definición t = 20 es un máximo relativo que vale $B(20) = -(20)^2/5 + 8(20) - 20 = 60$

Como fa función B(t) está definida en un intervalo cerrado sus extremos absolutos estarán entre los extremos del intervalo, es decir t = 0 y t = 25; y entre las soluciones de B '(t) = 0, es decir t = 20.
Evaluamos B(t) en 0, 20 y 25 y el valor más grande es el máximo absoluto.

B(0) = 4(0) = 0. Recordamos que si $0 \le t < 10$, B(t) = 4t.
B(20) = $-(20)^2/5 + 8(20) - 20 =$ **60**. Recordamos que si $10 \le t \le 25$, $B(t) = -t^2/5 + 8t - 20$.
$B(25) = -(25)^2/5 + 8(25) - 20 = 55$.

Por tanto el máximo absoluto es 60 y se alcanza en t = 20, es decir los beneficios de esta empresa fueron 60000 euros y se alcanzaron en su año 20.

c)

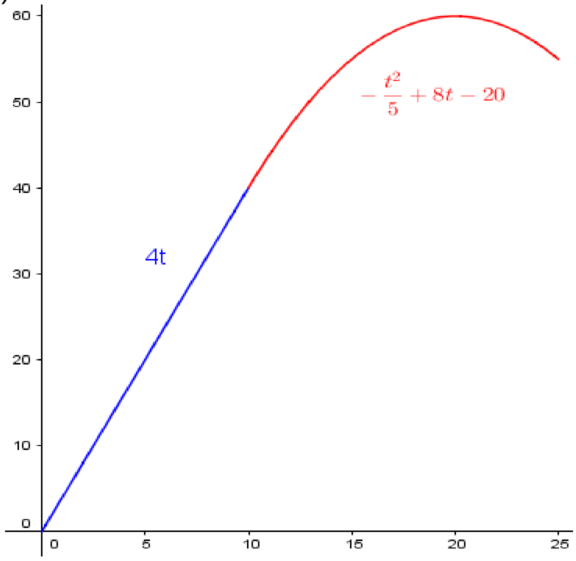
Represente gráficamente esta función.

Tenemos $B(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \le t < 10 \\ -\frac{1}{5}t^2 + 8t - 20 & \text{si } 10 \le t \le 25 \end{cases}$,

Si $0 \le t < 10$, $B(t) = 4t$, que es un trozo de segmento. Con dos puntos es suficiente para dibujarlo; para $t = 0$, $B(0) = 4(0) = 0$, punto $(0,0)$. Para $t = 10^-$, $B(10^-) = 4(10^-) = 40^-$, punto $(10^-,40^-)$.

Si $10 \le t \le 25$, $B(t) = - t^2/5 + 8t – 20$, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo $\cap$ (el número que multiplica a t^2 es negativo), su vértice ya lo hemos calculado que era su máximo relativo $V(20,60)$. Para terminar de dibujarla le damos un valor a "t" a la izquierda y a la derecha de la abscisa del vértice 20. Para $t = 10$, $B(10) = - (10)^2/5 + 8(10) – 20 = 40$, punto $(10,40)$; y Para $t = 25$, $B(25) = 55$, ya calculado, y el punto es $(25,55)$;

Un esbozo de la gráfica de f(x) es



16_mod5_EJERCICIO 3 (B)

De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'5$, $P((A\cup B)^C) = 0'1$.

a) (0'75 puntos) Razone si A y B son sucesos compatibles.

b) (0'75 puntos) Razone si A y B son sucesos independientes.

c) (0'5 puntos) Calcule $P(A\cap B^C)$.

d) (0'5 puntos) Calcule $P(A/B^C)$.

Solución

De los sucesos A y B de un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'5$, $P((A\cup B)^C) = 0'1$.

a)

Razone si A y B son sucesos compatibles.

Sabemos que A y B son compatibles si **$p(A\cap B) \neq 0$**

Del problema tenemos: $p(A) = 0'4$, $p(B) = 0'5$, $p(A\cup B)^C = 0'1$.

De $p(A\cup B)^C = 0'1 = 1 - p(A\cup B)$, tenemos $p(A\cup B) = 1- 0'1 = 0'9$.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $0'9 = 0'4 + 0'5 - p(A\cap B)$, luego **$p(A\cap B) =$** $0'4+0'5-0'9$ **$= 0$.**

Como **$p(A\cap B) = 0$, los sucesos A y B son incompatibles, luego no son compatibles.**

b)

Razone si A y B son sucesos independientes.

Sabemos que A y B son independientes si **$p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$**

Como $p(A\cap B) = 0 \neq p(A)\cdot p(B)$ $= 0'4\cdot 0'5$ **$= 0'2$, los sucesos A y B son dependientes, luego so son independientes.**

c)

Calcule $p(A\cap B^C)$.

Tenemos $\mathbf{p(A\cap B^C)}$ = $P(A) - P(A\cap B) = 0'4 - 0$ **= 0'4.**

d)

Calcule $P(A/B^C)$.

Me están pidiendo $\mathbf{p(A/B^C) =}\ \dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A)-p(A\cap B)}{1 - p(B^C)} =$ 0'4/(1 - 0'5) = 4/5 **= 0'8**.

16_mod5_EJERCICIO 4 (B)

(2'5 puntos) En un artículo de internet se afirma que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40.
Para contrastar dicha información se elige una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se observa que envían una media de 38 mensajes al día. Se sabe que el número de mensajes enviados diariamente sigue una distribución Normal de desviación típica 2. Con un nivel de significación del 5% plantee un contraste, ($H_0: \mu \geq 40$), determine la región de rechazo y concluya si ¿se puede aceptar la afirmación del artículo de internet?

Solución

En un artículo de internet se afirma que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40.
Para contrastar dicha información se elige una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se observa que envían una media de 38 mensajes al día. Se sabe que el número de mensajes enviados diariamente sigue una distribución Normal de desviación típica 2. Con un nivel de significación del 5% plantee un contraste, ($H_0: \mu \geq 40$), determine la región de rechazo y concluya si ¿se puede aceptar la afirmación del artículo de internet?

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu_0,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu_0, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos del problema: $\mu_0 = 40$; $n = 100$; $\overline{X} = 38$; $\sigma = 2$; el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40 ($H_0: \mu \geq 40$), nivel de significación = α = 5% = 0'05. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).
También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

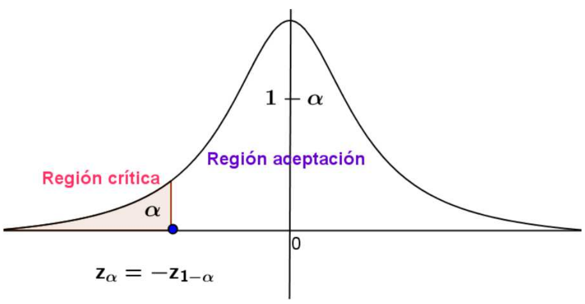
El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0: \mu \geq 40$ y $H_1: \mu < 40$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica está a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ *.*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto crítico que nos dará la región crítica y de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'05, tenemos un nivel de confianza o probabilidad = $1 - \alpha$ = 0'95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 - 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos $z_{1-\alpha}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645, en nuestro caso $\mathbf{-z_{1-\alpha}}$ **= -1'645** que separa la zona de aceptación y la de rechazo. La región de rechazo ó crítica es el intervalo (-∞,-1'645).

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{38 - 40}{2/\sqrt{100}}$ **= - 10.**

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -10$ **es menor** que el **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -1'645$, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 40$ y aceptar la hipótesis alternativa H_1: $\mu < 40$ con un nivel de significación del 5%**

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, se rechaza acepta la hipótesis de que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40, es decir es inferior a 40.