OPCIÓN A

17_mod6_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones

$A\cdot D + B\cdot C \qquad D^t\cdot B - A^2$

b) (1'5 puntos) Halle la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X = B - C$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a)

Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones: $A\cdot D + B\cdot C \qquad D^t\cdot B - A^2$

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda matriz, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz. También sabemos que para sumar dos matrices tienen que tener el mismo orden.

$A_{2x\mathbf{2}}\cdot D_{\mathbf{2}x3} + B_{2x\mathbf{2}}\cdot C_{\mathbf{2}x2}$. **Se puede realizar la multiplicación de las matrices A·D y B·C**, por lo explicado antes, **<u>pero no se pueden sumar porque el primer producto tiene de orden 2x3 y el segundo 2x2</u>**, y al no ser iguales no se puede sumar.

$D^t_{3x\mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{2}x2} - A^2_{2x2}$. **Se puede realizar la multiplicación de las matrices $D^t\cdot B$**, por lo explicado antes, **<u>pero no se pueden restar porque el primer producto tiene de orden 3x2 y el segundo 2x2</u>**, y al no ser iguales no se puede restar.

b)

Halle la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X = B - C$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0$, la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Multiplicando la expresión $A\cdot X = B - C$ por la izquierda por la matriz A^{-1}, tenemos $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C) \rightarrow$ $\rightarrow I_2\cdot X = A^{-1}\cdot(B - C) \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(B - C)}$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, $\det(A) = -2$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$(B - C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego: $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(B - C)} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

17_mod6_EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

a) (1'5 puntos) Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.

b) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

a)

Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada, de donde saldrán los extremos relativos:

$f(x) = x^3 - 12x + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 12$.

De $f'(x) = 0$, tenemos $3x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 4$, de donde $x = \pm 2$, que serán los posibles extremos relativos de f.

Como $f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-2)$.**

Como f '(0) = $3(0)^2 - 12 = -12 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-2,2).**

Como f '(3) = $3(3)^2 - 12 = 15 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (2,+∞).**

Por definición **x = -2 es un máximo relativo de f, que vale f(-2) =** $(-2)^3 - 12(-2) + 1$ **= 17**.
Por definición **x = 2 es un mínimo relativo de f, que vale f(2) =** $(2)^3 - 12(2) + 1$ **= -15**.
b)
Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1.

La recta tangente en x = 1 es y - f(1) = f '(1)·(x - 1)
$f(x) = x^3 - 12x + 1 \rightarrow f(1) = (1)^3 - 12(1) + 1 = -10$.
$f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow f'(x) = 3(1)^2 - 12 = -9$.
La recta tangente en x = 1 es **y - (-10) = -9·(x - 1)**, de donde **y = -9x - 1.**

17_mod6_EJERCICIO 3 (A)
De los sucesos A y B se sabe que p(A) = 0'6, p(B/A) = 0'8 y $p(B/A^C)$ = 0'1.
a) (1'8 puntos) Calcule las probabilidades p(B), $p(A\cup B)$ y $p(A\cap B)$.
b) (0'7 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes?

Solución

De los sucesos A y B se sabe que p(A) = 0'6, p(B/A) = 0'8 y $p(B/A^C)$ = 0'1.
a)
Calcule las probabilidades p(B), $p(A\cup B)$ y $p(A\cap B)$.

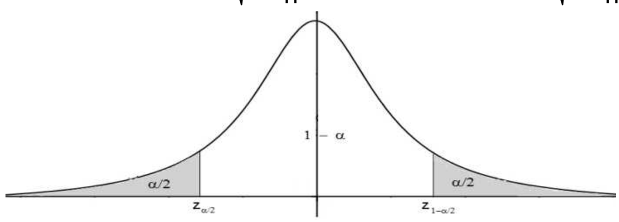
Tenemos p(B/A) = 0'8 = $\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$, de donde **$p(A\cap B)$ =** 0'8·0'6 **= 0'48**.

Tenemos $p(B/A^C)$ = 0'1 = $\frac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(B\cap A)}{1 - p(A)} = \frac{p(B) - 0'48}{1 - 0'6} = \frac{p(B) - 0'48}{0'4}$, de donde p(B) – 0'48 =
=0'1·0'4 = 0'04, por tanto **p(B) =** 0'48 + 0'04 **= 0'52**.
Por tanto **$p(A\cup B)$ =** p(A) + p(B) - $p(A\cap B)$ = 0'6 + 0'52 - 0'46 **= 0'64.**
b)
¿Son los sucesos A y B independientes?
Sabemos que A y B independientes si $p(A\cap B)$ = p(A)·p(B).
Como **$p(A\cap B)$ = 0'48 ≠ p(A)·p(B) =** 0'6·0'52 **= 0'312**, **los sucesos A y B no son independientes**.

17_mod6_EJERCICIO 4 (A)
Se desea estimar la proporción de bares y restaurantes que en el camino de Santiago ofertan el menú del peregrino con un precio máximo de 12 €. Para ello se eligen aleatoriamente 120 establecimientos que ofrecen este menú, de los que 80 tienen un precio máximo de 12 €.
a) (1'6 puntos) Con un nivel de confianza del 92 %, obtenga el intervalo de confianza para proporción de establecimientos que tienen un precio máximo de 12 €.
b) (0'4 puntos) Si aumentamos el nivel de confianza al 99 %, ¿qué efecto se produce en el error de estimación?
c) (0'5 puntos) ¿Cuántos establecimientos, como mínimo, deberíamos seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error de la estimación no sea superior a 0'04?

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el *estimador* PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$), y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$ o $\hat{p} \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la proporción es $\hat{p}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E= $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, *para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Se desea estimar la proporción de bares y restaurantes que en el camino de Santiago ofertan el menú del peregrino con un precio máximo de 12 €. Para ello se eligen aleatoriamente 120 establecimientos que ofrecen este menú, de los que 80 tienen un precio máximo de 12 €.
a)
Con un nivel de confianza del 92 %, obtenga el intervalo de confianza para proporción de establecimientos que tienen un precio máximo de 12 €.

Datos del problema: n = 120, $\hat{p} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 - $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{3}$, nivel de confianza 1 – α = 92% = = 0’92, de donde α = 0’08 = 8% como *nivel de significación*. De α = 0’08 tenemos $\alpha/2$ = 0’04

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0’04 = 0’96, probabilidad que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’96 no viene en la tabla y uno de los valores más próximos es 0’9599, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = = 1’75 (Interpolando $z_{1-\alpha/2}$ = 1’7511). Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{2}{3} - 1'96.\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{120}}, \frac{2}{3} + 1'96.\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{120}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'58232;\ 0'75101)}$$

b)
Si aumentamos el nivel de confianza al 99 %, ¿qué efecto se produce en el error de estimación?

Datos del problema: n = 120, $\hat{p} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 - $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{3}$, nivel de confianza = 99% = 0’99 = 1 - α, de donde α = 0’01, es decir $\alpha/2$ = 0’01/2 = 0’005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0’005 = 0’995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’995 no viene, las más próximas son 0’9949 y 0’9951 que corresponden a 2’57 y 2’58, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2’57 + 2’58)/2 = 2’575.

Sabemos que el error es E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, en el apartado (a) era E ≤ $1'96.\sqrt{\frac{(2/3)\cdot(1/3)}{120}} \cong 0'084345$, y en este caso es E ≤ $2'575\cdot\sqrt{\frac{(2/3)\cdot(1/3)}{120}} \cong 0'11081$, **por tanto el erro aumenta si aumentamos el nivel de confianza.**

c)
¿Cuántos establecimientos, como mínimo, deberíamos seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error de la estimación no sea superior a 0’04?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 2/3, $\hat{q}$ = 1/3, error = E ≤ 0’04, nivel de confianza = 99% = 0’99, y como hemos visto en el apartado (b) el punto crítico es $z_{1-\alpha/2}$ = 2’575.

De E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos n ≥ $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'575)^2\cdot(2/3)\cdot(1/3)}{(0'04)^2} \cong 920'92$, por tanto **el tamaño mínimo de establecimientos que hay que seleccionar es n = 921.**

OPCION B

17_mod6_EJERCICIO 1 (B)

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \le 11 \qquad x \ge 2y - 5 \qquad 3x + y \le 18 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

a) (1'5 puntos) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.
b) (0'5 puntos) ¿Pertenece el punto (5'5, 2) a la región anterior?
c) (0'5 puntos) Calcule los puntos de esa región en los que la función F(x,y) = 2x + 3y alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores.

Solución

(a), (b) y (c).
Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$x + 2y \leq 11 \qquad x \geq 2y - 5 \qquad 3x + y \leq 18 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$

(a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.
b) ¿Pertenece el punto (5'5, 2) a la región anterior?
c) Calcule los puntos de esa región en los que la función F(x,y) = 2x + 3y alcanza los valores máximo y mínimo y determine dichos valores.

Función a optimizar es F(x,y) = 2x + 3y.
Restricciones: $x + 2y \leq 11$; $x \geq 2y - 5$; $3x + y \leq 18$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
(b) ¿Pertenece el punto (5'5, 2) a la región anterior?. Observamos si verifica las cinco inecuaciones a la vez:

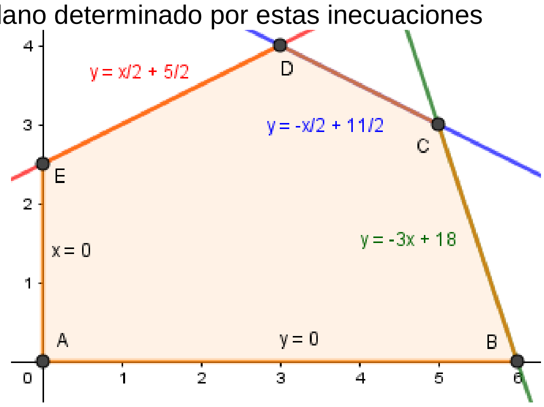
$x + 2y \leq 11$	$\rightarrow$ (5'5) + 2(2) ≤ 11	$\rightarrow$ 9'5 ≤ 11. CIERTO
$x \geq 2y - 5$	$\rightarrow$ (5'5) ≥ 2(2) - 5	$\rightarrow$ 5'5 ≥ -1. CIERTO
$3x + y \leq 18$	$\rightarrow$ 3(5'5) + (2) ≤ 18	$\rightarrow$ 18'5 ≤ 18. **FALSO**
$x \geq 0$	$\rightarrow$ 5'5 ≥ 0	$\rightarrow$ 3 ≥ 0. CIERTO
$y \geq 0$	$\rightarrow$ 2 ≥ 0	$\rightarrow$ 3 ≥ 0. CIERTO

Como el punto (5'5,2) no verifica una de las inecuaciones, **dicho punto (5'5,3) no pertenece al dominio cerrado convexo.**

(a) y (c)
Las desigualdades $x + 2y \leq 11$; $x \geq 2y – 5$; $3x + y \leq 18$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + 2y = 11$; $x = 2y – 5$; $3x + y = 18$; $x = 0$; $y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = -x/2 + 11/2$; $y = x/2 + 5/2$; $y = -3x + 18$; $x = 0$; $y = 0$

Dibuje el recinto convexo del plano determinado por estas inecuaciones



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice es A(0,0).
De $y = 0$ e $y = -3x+18$, tenemos $0 = -3x+18 \rightarrow 18 = 3x \rightarrow x = 6$, y el vértice es B(6,0).
De $y = -3x+18$ e $y = -x/2+11/2$, tenemos $-3x+18 = -x/2+11/2 \rightarrow -6x+36 = -x+11 \rightarrow 25 = 5x$, con lo cual $x = 5$ $y = -3(5)+18 = 3$, y el vértice es C(5,3).
De $y = -x/2+11/2$ e $y = x/2+5/2$, tenemos $-x/2+11/2 = x/2+5/2 \rightarrow -x+11 = x+5 \rightarrow 6 = 2x$, con lo cual $x = 3$, e $y = (3)/2+5/2= 4$, y el vértice es D(3,4).
De $x = 0$ e $y = x/2+5/2$, tenemos $y = 5/2 = 2'5$, y el vértice es E(0,2'5).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(6,0), C(5,3), D(3,4) y E(0,2'5).

Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = 2x + 3y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(6,0), C(5,3), D(3,4) y E(0,2'5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(0,0) = 2(0) + 3(0) **= 0**; F_B(6,0) = 2(6) + 3(0) = 12; **F_C(5,3) =** 2(5) + 3(3) **= 19**;
F_D(3,4) = 2(3) + 3(4) = 18; F_E(0,2'5) = 2(0) + 3(2'5) = 7'5.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 19** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(5,3), y el mínimo absoluto de la función F en la región es 0** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(0,0).**

17_mod6_EJERCICIO 2 (B)
a) (1'5 puntos) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3+ ax^2+ b$ presente un extremo relativo en el punto (2,6).
b) (1 punto) Para a = 1 y b = 1, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa x = 1.

Solución

a)
Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3+ ax^2+ b$ presente un extremo relativo en el punto (2,6).

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ es continua y derivable en todo R, y su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2ax$.

Sabemos que si el punto (2,6) es un extremo relativo de la gráfica de f, tenemos f '(2) = 0.
Por (2,6) ser punto de la gráfica de f, tenemos f(2) = 6.

De f '(2) = 0, tenemos $f'(2) = 3(2)^2 + 2a(2) = 0 = 12 + 4a = 0$, de donde **a = -3**.

De f(6) = 0, tenemos $f(2) = (2)^3 + (-3)\cdot(2)^2 + b = 6 \rightarrow -4 + b = 6$, de donde **b = 10**.
b)
Para a = 1 y b = 1, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa x = 1.

Para a = 1 y b = 1, tenemos $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2x$

La recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$

$f(x) = x^3 + x^2 + 1 \rightarrow f(1) = (1)^3 + (1)^2 + 1 = 3$.
$f'(x) = 3x^2 + 2x \rightarrow f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) = 5$.
La recta tangente en x = 1 es **$y - (3) = 5\cdot(x - 1)$**, de donde **$y = 5x + 8$.**

17_mod6_EJERCICIO 3 (B)
El 10 % de las personas que acuden a un servicio de urgencias lo hace por problemas respiratorios, de éstos el 80 % son fumadores, mientras que de los que acuden por otros problemas solo el 5 % son fumadores. Se elige, al azar, una persona de las que acuden al servicio de urgencias.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas respiratorios y no sea fumador?
b) (1'5 puntos) Si la persona elegida es fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas que no son respiratorios?

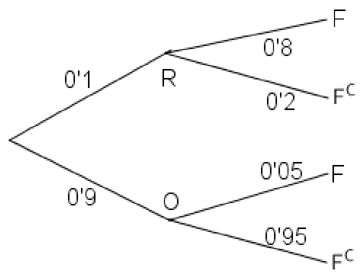
Solución

El 10 % de las personas que acuden a un servicio de urgencias lo hace por problemas respiratorios, de éstos el 80 % son fumadores, mientras que de los que acuden por otros problemas solo el 5 % son fumadores. Se elige, al azar, una persona de las que acuden al servicio de urgencias.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas respiratorios y no sea fumador?

Llamemos R, O, F y F^C, a los sucesos siguientes, "tener problemas respiratorios", "tener otros problemas", "ser fumador" y "no ser fumador", respectivamente.

Datos del problema p(R) = 10% = 0'1; p(F/R) = 80% = 0'8 ; p(F/O) = 5% = 0'05, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(acudir por problemas respiratorios y ser fumador) = p(R y F^C) = p(R$\cap$F^C) =**
= p(R)·p(FC/R) = (0'1)$\cdot$(0'2) **= 0'02.**
b)
Si la persona elegida es fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido por problemas que no son respiratorios?

Me piden **p(siendo fumadora acuda por problemas no respiratorios) = p(O/F).**

Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(ser fumadora) = p(F) = p(R).p(F/R) + p(O).p(F/O) = (0'1)$\cdot$(0'8) + (0'9)$\cdot$(0'05) = *1/8 = 0'125*.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(O/F) = $\frac{p(O\cap F)}{p(F)} = \frac{p(O).p(F/O)}{p(F)} = \frac{(0'9)\cdot(0'05)}{0'125}$ **= 9/25 = 0'36**.

17_mod6_EJERCICIO 4 (B)
El precio de un determinado producto se distribuye según una ley Normal de desviación típica 5 € y media desconocida. Se toman 10 comercios al azar y se observa en ellos el precio de este producto, resultando los siguientes valores en euros:

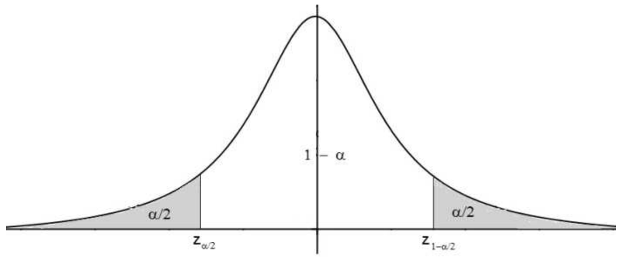
96 108 97 112 99 106 105 100 98 99

a) (0'5 puntos) ¿Cuál es la distribución del precio medio del producto en las muestras de tamaño 10?
b) (1 punto) Determine un intervalo de confianza, al 97 %, para la media poblacional.
c) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra de esa población para que el error cometido sea menor que 2?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

El precio de un determinado producto se distribuye según una ley Normal de desviación típica 5 € y media desconocida. Se toman 10 comercios al azar y se observa en ellos el precio de este producto, resultando los siguientes valores en euros:

96 108 97 112 99 106 105 100 98 99

a)
¿Cuál es la distribución del precio medio del producto en las muestras de tamaño 10?

Datos del problema: $\sigma = 5$; $\overline{x} = (96+108+97+112+99+106+105+100+98+99)/10 = 102$; n = 10

Sabemos que si X sigue una distribución Normal $N(\mu,\sigma)$ siendo μ la media poblacional y σ la desviación típica poblacional, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una ley normal $N\left(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, siendo $\overline{x}$ la media de una de las muestras y $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ la desviación típica muestral, donde "n" es el tamaño de la muestra. En nuestro caos tenemos $\overline{X} \rightarrow N\left(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(102, \frac{5}{\sqrt{10}}\right)$

b)
Determine un intervalo de confianza, al 97 %, para la media poblacional.

Datos del problema: $\sigma = 5$; $\overline{x} = (96+108+97+112+99+106+105+100+98+99)/10 = 102$; n = 10; nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual $\alpha/2$ = 0'03/2 = 0'055.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene y corresponden a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido eses:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(120 - 2'17\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}, 120 + 2'17\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \cong$ **(116'569,123'431) euros.**

c)
Con el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra de esa población para que el error cometido sea menor que 2?

Datos del problema: $\sigma = 5$; $E \le 2$; nivel de confianza = 97% = 0'97, y ya hemos visto en el apartado (b) que le correspondía un punto crítico de $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto tamaño mínimo pedido es:

De $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17\cdot5}{2}\right)^2 \cong 29'43$, es decir **el tamaño mínimo de comercios a elegir es de n = 30**.