OPCIÓN A

18_mod3_EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28.
Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener un beneficio económico máximo?

Solución

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de pañuelos.
Sea y = nº de corbatas.

	Pañuelos	Corbatas	Total
horas	2	3	60 h
Precio	4 €	6 €	

De "cada pañuelo 2 horas de trabajo, cada corbata 3 horas, con 60 horas como máximo"
$\rightarrow 2x + 3y \le 60$.
De "el número de corbatas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28".
$\rightarrow 2x + y \ge 28$.
De "se confecciona algún pañuelo y alguna corbata" $\rightarrow x \ge 0$; $y \ge 0$.

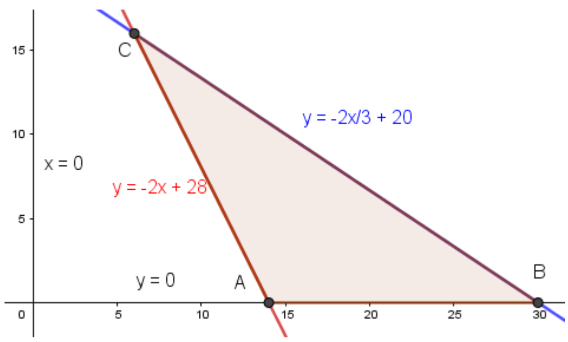
De "cada pañuelo reporta un beneficio de 4 euros y cada corbata 6 euros respectivamente por unidad", tenemos que la función a optimizar es: $F(x,y) = 4x + 6y$.

Resumiendo:

Función a optimizar es $F(x,y) = 4x + 6y$.
Restricciones: $2x + 3y \le 60$; $2x + y \ge 28$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Las desigualdades $2x + 3y \le 60$; $2x + y \ge 28$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son las rectas, $2x + 3y = 60$; $2x + y = 28$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = -2x/3 + 20$; $y = - 2x + 28$; $x = 0$; $y = 0$.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B y C de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 0$ e $y = -2x + 28$, tenemos $0 = -2x+28 \rightarrow 2x = 28 \rightarrow x = 14$, y el vértice es A(14,0).
De $y = 0$ e $y = -2x/3 + 20$, tenemos $0 = -2x/3+20 \rightarrow 2x/3 = 20 \rightarrow x = 30$, y el vértice es B(30,0).
De $y = -2x/3 + 20$ e $y = -2x + 28$, tenemos $-2x/3 + 20 = -2x + 28 \rightarrow -2x + 60 = -6x + 84 \rightarrow 4x = 24$, con lo cual $x = 6$ e $y = 16$, y el vértice es C(6,16).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(14,0), B(30,0) y C(6,16).

Veamos el máximo de la función F(x,y) = 4x + 6y en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(14,0), B(30,0) y C(6,16). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(14,0) = 4(14) + 6(0) = 56$; $\mathbf{F_B(30,0)} = 4(30) + 6(0) \mathbf{= 120}$; $\mathbf{F_C(6,16)} = 4(6) + 6(16) \mathbf{= 120}$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 120** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices B(30,0) y C(6,16), es decir el máximo es 120€ y se obtiene de dos formas, fabricando 30 pañuelos y 0 corbatas o fabricando 6 pañuelos y 16 corbatas.** (No sirve decir que la solución se alcanza en todo el segmento BC, porque hay que dar soluciones enteras para x e y)

18_mod3_EJERCICIO 2 (A)

a) (1 punto) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = x\cdot\ln(x)$ y $g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4+1}$.

b) (1'5 puntos) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^2 + 6x + 5$, en el punto de abscisa x = -2. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

Solución

a)

Calcule la derivada de las funciones $f(x) = x\cdot\ln(x)$ y $g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4+1}$.

$f(x) = x\cdot\ln(x) \rightarrow f'(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot(1/x) = \ln(x) + 1$.

$$g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4+1} \rightarrow g'(x) = \frac{e^{3x}\cdot 3\cdot(x^4+1) - e^{3x}\cdot(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{e^{3x}\cdot(3x^4 - 4x^3 + 3)}{(x^4+1)^2}.$$

b)

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^2 + 6x + 5$, en el punto de abscisa x = -2. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

La recta tangente a la gráfica de la función h, en el punto de abscisa x = -2 es: "$y - h(-2) = h'(-2)\cdot(x + 2)$"

$h(x) = x^2 + 6x + 5 \rightarrow h(-2) = (-2)^2 + 6(-2) + 5 = -3$. $h'(x) = 2x + 6 \rightarrow h'(-2) = 2(-2) + 6 = 2$

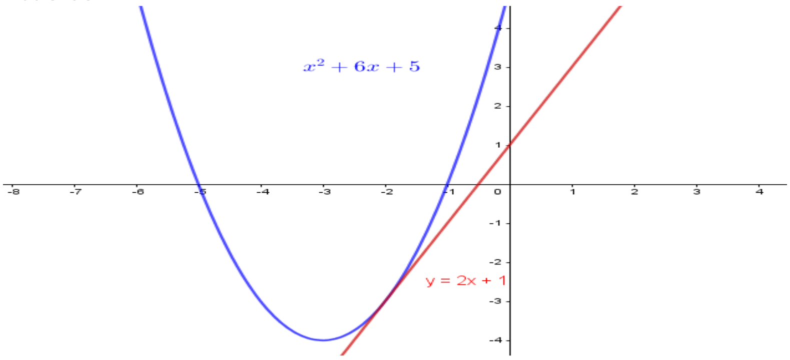
La recta tangente pedida es $\mathbf{y - (-3) = 2\cdot(x + 2)}$. La recta $y - (-3) = 2\cdot(x + 2)$ se puede poner como: $y = 2x+1$.

La gráfica de $h(x) = x^2 + 6x + 5$ es la de una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$, porque el número que multiplica a x^2 es positivo (a = 1), abscisa del vértice en la solución de $h'(x) = 0 = 2x + 6 \rightarrow x = -3$, luego el vértice es V(-3, h(-3)) = V(-3, -4).

Un punto de la parábola es el de tangencia (-2, -3). Otro para x = 0, h(0) = 6.

Para la recta tangente tenemos el punto de tangencia (-2, -3). Otro para x = 0, y(0) = 2(0) + 1 = 1.

Un esbozo de las gráficas es:



18_mod3_EJERCICIO 3 (A)

En un centro de enseñanza secundaria el 48% de los estudiantes son chicos. El 85% de los chicos del centro y el 82% de las chicas supera todas las asignaturas. Se elige al azar un estudiante del centro.
a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que supere todas las asignaturas?
b) (1 punto) Si ha superado todas las asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?

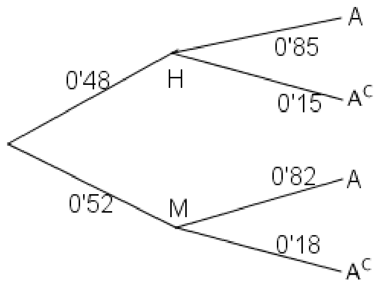
Solución

En un centro de enseñanza secundaria el 48% de los estudiantes son chicos. El 85% de los chicos del centro y el 82% de las chicas supera todas las asignaturas. Se elige al azar un estudiante del centro.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que supere todas las asignaturas?

Llamemos H, M, A y A^C, a los sucesos siguientes, "ser chico", "ser chica", "aprobar " y "no aprobar", respectivamente.

Datos del problema: p(H) = 48% = 0'48; p(A/H) = 85% = 0'85 ; p(A/M) = 82% = 0'82, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(A) =** p(H).p(A/H) + p(M).p(A/M) = (0'48)·(0'85) + (0'52)·(0'82) **= 0'8344**.
b)
Si ha superado todas las asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?

Me piden **p(M/A)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(M/A) =} \frac{p(M \cap A)}{p(A)} = \frac{p(M)\cdot p(A/M)}{p(A)} = \frac{(0'52)\cdot(0'82)}{0'8344} \mathbf{= 533/1043 \cong 0'511}.$$

18_mod3_EJERCICIO 4 (A)

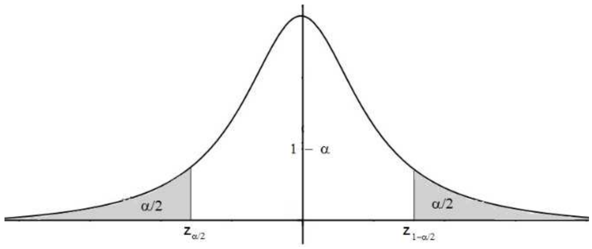
El peso de las ciruelas de una determinada variedad sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 3 gramos. Se eligen al azar 25 ciruelas de esa variedad y se pesan, resultando un peso medio de 60 gramos.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo al 95% de confianza para estimar el peso medio de las ciruelas de esa variedad.
b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar, para que al estimar el peso medio de esa variedad de ciruelas con un nivel de confianza del 99%, el error cometido sea inferior a 1 gramo

Solución

El peso de las ciruelas de una determinada variedad sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 3 gramos. Se eligen al azar 25 ciruelas de esa variedad y se pesan, resultando un peso medio de 60 gramos.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b); también sabemos que $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo* de *confianza de las medias, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Calcule un intervalo al 95% de confianza para estimar el peso medio de las ciruelas de esa variedad.

Datos del problema: σ = 3; n = 25; $\overline{x}$ = 60; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(60 - 1'96\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}, 60 + 1'96\cdot\frac{3}{\sqrt{25}}\right)$ **= (58'824,61'176) gramos.**

b)
Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar, para que al estimar el peso medio de esa variedad de ciruelas con un nivel de confianza del 99%, el error cometido sea inferior a 1 gramo

Datos del problema: σ = 3; error = E ≤ 1; nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir α/2 = 0'01/2 = 0'005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575.

De error E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575\cdot 3}{1}\right)^2$ ≅ 59'675, tenemos que **el tamaño mínimo de ciruelas para elegir es de 60.**

OPCIÓN B

18_mod3_EJERCICIO 1 (B)

Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (0'5 puntos) Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos ($A\cdot P\cdot B^t$) y ($Q\cdot A\cdot C$) den como resultado una matriz cuadrada.
b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - 2B\cdot C^t$ = A2.

Solución

Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a)
Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos ($A\cdot P\cdot B^t$) y ($Q\cdot A\cdot C$) den como resultado una matriz cuadrada.

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda matriz, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz.

Para poder multiplicar y salga cuadrada tenemos $A_{2x\mathbf{2}}\cdot P_{\mathbf{2x3}}\cdot B^t_{\mathbf{3}x2}$, **luego P es de orden o dimensión 2x3**.

Para poder multiplicar y salga cuadrada tenemos $Q_{3x\mathbf{2}}\cdot A_{\mathbf{2x2}}\cdot C_{\mathbf{2}x3}$, **luego Q es de orden o dimensión 3x2**.

b)

Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - 2B\cdot C^t = A^2$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ \text{ y }\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La expresión $A\cdot X - 2B\cdot C^t = A^2$, la podemos escribir como $A\cdot X = 2B\cdot C^t + A^2$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$.

De $A\cdot X = 2B\cdot C^t + A^2$., multiplicando ambos miembros por la izquierda por C^{-1} tenemos:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(2B\cdot C^t + A^2) \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(2B\cdot C^t + A^2) \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(2B\cdot C^t + A^2)}$.

Calculamos $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$, $|A| = 2$; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tenemos } 2B\cdot C^t = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 22 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}\quad ;\ 2B\cdot C^t + A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 22 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz es $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(2B\cdot C^t + A^2)} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -62 & -52 \\ -40 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -26 \\ -20 & -15 \end{pmatrix}$.

18_mod3_EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx + 1}$, con a y b números reales.

a) (1'5 puntos) Calcule los valores de a y b, sabiendo que f (-1) = 1 y que en el punto de abscisa x = 0 la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta y = 2x +1.

b) (1 punto) Para a = b = 1, halle la ecuación de sus asíntotas.

Solución

Se considera la función $f(x) = \dfrac{ax}{bx + 1}$, con a y b números reales.

a)

Calcule los valores de a y b, sabiendo que f (-1) = 1 y que en el punto de abscisa x = 0 la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta y = 2x +1.

Tenemos **f (-1) = 1** $\rightarrow 1 = \dfrac{a(-1)}{b(-1) + 1} \rightarrow -b + 1 = -a \rightarrow$ **a = b – 1.**

De en "x = 0" la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta y = 2x +1, sabemos que las rectas paralelas tienen igual pendiente, la pendiente de la recta tangente en x = 0 es f '(0), y la pendiente de la recta y = 2x + 1 es y ' = 2, por tanto **f '(0) = 2.**

Tenemos **f '(0) = 2.**

De $f(x) = \dfrac{ax}{bx + 1} \rightarrow f'(x) = \dfrac{a\cdot(bx + 1) - ax\cdot(b)}{(bx + 1)^2} \rightarrow f'(0) = 2 = \dfrac{a\cdot(b(0) + 1) - a(0)\cdot(b)}{(b(0) + 1)^2} \rightarrow$ **2 =** a/1 **= a**, por tanto 2 = b – 1**, de donde 3 = b. Los valores pedidos son a = 2 y b = 3.**

b)

Para a = b = 1, halle la ecuación de sus asíntotas.

Nuestra función es $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Cómo el número que anula el denominador es x = -1, y además $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$, **la recta x = 0 es una asíntota de la gráfica de f.**

Para la posición relativa $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Como la función f es una cociente de funciones polinómicas, con el numerador y denominador de igual grado, sabemos que **tiene una asíntota horizontal, y es la misma es en ± ∞.**

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}(1) = 1$, **la recta y = 1 es la asíntota horizontal de la gráfica de f en ± ∞.**

Por tener asíntotas horizontal en ± ∞, **la gráfica de f no tiene asíntotas oblicuas en ± ∞.**

Posición relativa

Como $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - A.H.) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x+1} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x - (x+1)}{x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{+\infty} = 0^-$, la *gráfica de f está por debajo de la recta y = 1* en +∞.

Como $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - A.H.) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x}{x+1} - 1\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x - (x+1)}{x+1}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{-\infty} = 0^+$, la *gráfica de f está por encima de la recta y = 1* en -∞.

18_mod3_EJERCICIO 3 (B)

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un experimento aleatorio.

a) (0'5 puntos) Se sabe que p(A) = 0'5, p(A∪B) = 0'7 y p(A∩B) = 0'4 . Halle la probabilidad de que ocurra B.

b) (1 punto) Se sabe que p(C) = 0'4, p(D) = 0'3 y p(C∪D) = 0'5 . Halle la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

c) (1 punto) Se sabe que los sucesos E y F son independientes, que p(E) = 0'6 y que p(F) = 0'8. Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos

Solución

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un experimento aleatorio.

a)

Se sabe que p(A) = 0'5, p(A∪B) = 0'7 y p(A∩B) = 0'4 . Halle la probabilidad de que ocurra B.

Tenemos p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B), sustituyendo 0'7 = 0'5 + p(B) – 0'4, luego **p(B) =** 0'7- 0'5 +0'4 = **= 0'6**.

b)

Se sabe que p(C) = 0'4, p(D) = 0'3 y p(C∪D) = 0'5 . Halle la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

Me piden **p(C/noD) =** $p(C/D^C)$ **= p(C) - p(C∩D)**

Necesito p(C∩D)

Tenemos p(C∪D) = p(C) + p(D) - p(C∩D), sustituyendo 0'5 = 0'4 + 0'3 – p(C∩D), luego p(C∩D) = **=** 0'4 + 0'3 - 0'5 = 0'2.

Por tanto **$p(C/D^C)$ =** p(C) - p(C∩D) = 0'4 – 0'2 **= 0'2**

c)

Se sabe que los sucesos E y F son independientes, que p(E) = 0'6 y que p(F) = 0'8. Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos

Sabemos que dos sucesos E y F son independientes si p(E∩F) = p(E)·p(F) = 0'6·0'8 = 0'48.

Sabemos que p(E∪F) = p(E) + p(F) - p(E∩F) = 0'6 + 0'8 – 0'48 = 0'92

Me piden **p(noE y no F) = $p(E^C \cap F^C)$ =** {Ley de Morgan} = $p(E \cup F)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(E∪F) = = 1 - 0'92 **= 0'08.**

18_mod3_EJERCICIO 4 (B)

Se desea estimar el porcentaje de jóvenes que utilizan una determinada red social. Para ello se escoge una muestra aleatoria simple de 500 jóvenes y de ellos 410 afirman utilizarla.

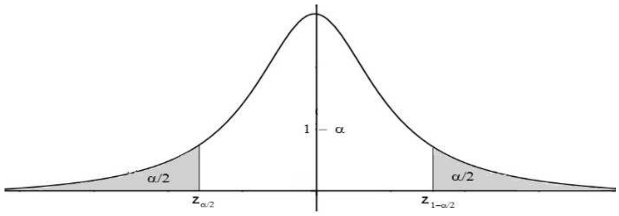
a) (1’5 puntos) Calcule el intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usa esa red social con un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) Manteniendo la proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97%, el error máximo que se cometa al estimar la proporción de esa población sea inferior a 0’04.

Solución

Se desea estimar el porcentaje de jóvenes que utilizan una determinada red social. Para ello se escoge una muestra aleatoria simple de 500 jóvenes y de ellos 410 afirman utilizarla.

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue* una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y gen*eralmente escribimos* $\boldsymbol{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\boldsymbol{p} \rightarrow N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

a)

Calcule el intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usa esa red social con un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: n = 500; $\hat{p}$ = 410/500 = 0’82, $\hat{q}$ = 1 - 0’82 = 0’18, nivel de confianza = 95% = 0’95 = = 1 - α, de donde α = 0’05, es decir α/2 = 0’05/2 = 0’025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'82 - 1'96.\sqrt{\frac{0'82\cdot 0'18}{500}}, 0'82 + 1'96.\sqrt{\frac{0'82\cdot 0'18}{500}}\right) \cong$$

≅ **(0’7863245; 0’8536755).**

b)

Manteniendo la proporción muestral, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con un nivel de confianza del 97%, el error máximo que se cometa al estimar la proporción de esa población sea inferior a 0’04.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’82, $\hat{q}$ = 0’18, error = E ≤ 0’04, nivel de confianza = 97% = 0’97 = 1 - α, de donde α = 0’03, con la cual α/2 = 0’03/2 = 0’055.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’985 viene y corresponden a 2’17, luego $z_{1-\alpha/2} = 2'17$.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot 0'82\cdot 0'18}{(0'04)^2}$ = 434’396, por tanto **el tamaño mínimo de jóvenes que hay que seleccionar es n = 435.**