SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS MODELO 5 DEL 2015

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Resuelva la ecuación $A\cdot X + B\cdot X = C$.
b) (1'25 puntos) Calcule A^4 y A^{80}.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a)
Resuelva la ecuación $A\cdot X + B\cdot X = C$.

De $A\cdot X + B\cdot X = C \rightarrow (A + B)\cdot X = C \rightarrow$ $\mathbf{D\cdot X = C}$, con $D = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, existe su matriz inversa $D^{-1} = (1/|D|)\cdot Adj(D^t)$.

Multiplicando la expresión $D\cdot X = C$, por D^{-1} por la izquierda tenemos:
$D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X = D^{-1}\cdot C \rightarrow$ $\mathbf{X = D^{-1}\cdot C.}$
Calculamos la matriz inversa D^{-1}.

$D^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, luego $\mathbf{D^{-1} = (1/|D|)\cdot Adj(D^t) = (1/1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(D|I_2)$, a la expresión $(I_2|E)$, donde $E = D^{-1}$.

$(D|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2 - 2F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$, por tanto $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X = D^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.}$

b)
Calcule A^4 y A^{80}.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A^4} = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **= I_2, matriz identidad de orden 2.**

$\mathbf{A^{80}} = (A^4)^{20} = \mathbf{(I_2)^{20} = I_2}$**, matriz identidad de orden 2.**

EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$.

a) (1'2 puntos) Represente gráficamente la función f.
b) (0'8 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) (0'5 puntos) Calcule f '(1) y f '(5).

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$.

a)
Represente gráficamente la función f.

Si $x \le 0$, $f(x) = 1$ que es una función constante y su gráfica es una semirrecta paralela al eje de abscisas de altura 1.

Si 0 < x < 4, f(x) = $-x^2 + 1$, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo (∩), porque el número que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de f '(x) = -2x = 0, es decir x = 0. Vértice en V(0^+,1), y pasa por (4^-,f(4)) = (4^-,-15).

Si x ≥ 4, f(x) = $x^2 - 8x + 17$, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba (∪), porque el número que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 2x - 8= 0, es decir x = 4. Vértice en V(4,f(4)) = V(4,1), y pasa por (5,f(5)) = (5,2).

Se observa que es continua en x = 0 y no es continua en x = 4, porque se cumple que:

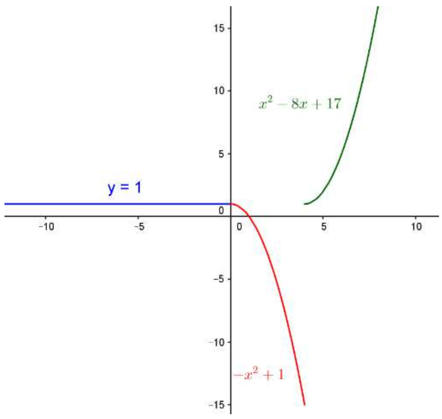
$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1) = 1$, y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$.

$f(4) \neq \lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x^2 - 8x + 17) = 4^2 - 8(4) + 17 = 1$, y $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (-x^2 + 1) = -4^2 + 1 = -15$. *Como f no es continua en x = 4, f no es derivable en x = 4.*

Un esbozo de la gráfica es



b)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

Si x ≤ 0, f(x) = 1 que es una función constante y por tanto continua y derivable en todo R, en particular es continua y derivable en x < 0.
Si 0 < x < 4, f(x) = $-x^2 + 1$, que es una función polinómica y por tanto continua y derivable en todo R, en particular es continua y derivable en 0 < x < 4.
Si x ≥ 4, f(x) = $x^2 - 8x + 17$, que es una función polinómica y por tanto continua y derivable en todo R, en particular es continua y derivable en x > 4.
Faltaría estudiar la continuidad y derivabilidad en x = 0 y en x = 4. Ya hemos visto que es continua en x = 0, pero no en x = 4. **Resumiendo f es continua en R – {4}.**
Como f no es continua en x = 4, tampoco es derivable en x = 4.
Veamos si es derivable en x = 0, es decir si f '(0-) = f '(0+)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 2x - 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}.$$

Estudiaremos la continuidad de la derivada.

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (0) = 0$. $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-2x) = 0$. Como f '(0-) = f '(0+), existe f '(0), es decir **f(x) es derivable en R – {4}.**

c)
Calcule f '(1) y f '(5).

Vemos que x = 1 está en 0 < x < 4, donde f '(x) = -2x, luego **f '(1) = -2(1) = -2**.
Vemos que x = 5 está en x > 4, donde f '(x) = 2x - 8, luego **f '(5) = 2(5) - 8 = 2**.

EJERCICIO 3 (A)

a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus puntuaciones sea un múltiplo de 4.
b) (1 punto) De un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades $P(A^C) = 0'8$, $P(B^C) = 0'7$,

$P(A\cup B) = 0'5$. ¿Son A y B incompatibles?

Solución

a)

Calcule la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus puntuaciones sea un múltiplo de 4.

Sabemos que al lanzar dos dados tenemos *36 = 6x6 sucesos elementales distintos posibles*.
La suma de las puntuaciones son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.
Los múltiplos de 4 son el 4, el 8 y el 12. Veamos los sucesos elementales que lo componen:
El 4 viene de (1,3), (3,1) y (2,2).
El 8 viene de (2,6), (6,2), (3,5), (5,3) y (4,4).
El 12 viene de (6,6). Vemos *que hay en total 9 casos favorables* (tres del 4, cinco del 8 y uno del 12).
p(suma múltiplo de 4) = (número de casos favorables)/(número de casos posibles) = 9/36 = 1/4 = 0'25.

b)

De un experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades $P(A^C) = 0'8$, $P(B^C) = 0'7$, $P(A\cup B) =$ $= 0'5$. ¿Son A y B incompatibles?

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.
A y B son incompatibles si $p(A\cap B) \neq 0$.

De $P(A^C) = 0'8$, $p(A) = 1 - P(A^C) = 1 – 0'8 = 0'2$.
Análogamente de $P(B^C) = 0'7$, $p(B) = 1 - P(B^C) = 1 – 0'7 = 0'3$.
Como $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B) = 0'2 + 0'3 – 0'5 = 0$, **los sucesos A y B son incompatibles.**

EJERCICIO 4 (A)

(2'5 puntos) El servicio de atención al cliente de una empresa funciona eficazmente si el tiempo medio de atención es inferior o igual a 7 minutos. Se toma una muestra de 36 clientes atendidos y se observa que el tiempo medio es de 8 minutos. Suponiendo que el tiempo empleado en atender a un cliente sigue una distribución Normal con varianza 16, plantee un contraste de hipótesis ($H_0 :\mu \leq 7$), con un nivel de significación de 0'05, determine la región crítica de este contraste y razone si se puede aceptar que ese servicio funciona de forma eficaz.

Solución

El servicio de atención al cliente de una empresa funciona eficazmente si el tiempo medio de atención es inferior o igual a 7 minutos. Se toma una muestra de 36 clientes atendidos y se observa que el tiempo medio es de 8 minutos. Suponiendo que el tiempo empleado en atender a un cliente sigue una distribución Normal con varianza 16, plantee un contraste de hipótesis ($H_0 :\mu \leq 7$), con un nivel de significación de 0'05, determine la región crítica de este contraste y razone si se puede aceptar que ese servicio funciona de forma eficaz.

Del problema: $H_0 :\mu \leq 7$ (tiempo de atención es inferior o igual a 7 minutos), tamaño de la muestra n = 36; tiempo medio $\overline{x} = 8$, varianza $\sigma^2 = 16$, desviación típica poblacional = σ = 5, nivel de significación de α=5% = = 0'05, luego $X \rightarrow N(\mu,4)$, y *la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue también una distribución normal:*

$N(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(8, \frac{4}{\sqrt{16}}) = N(8,1)$

Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

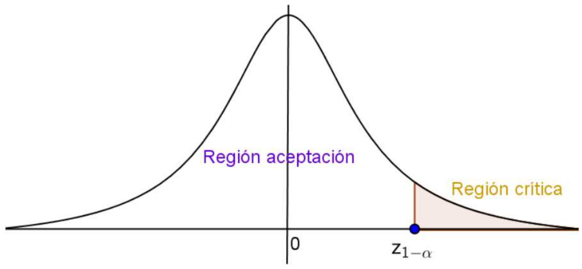
El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son $H_0 :\mu \leq 7$ (el tiempo medio de atención es inferior o igual a 7 minutos) y $H_1 : \mu > 7$, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste unilateral por la derecha*, *por tanto la región crítica está a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$* .

Etapa 2: Calculamos el punto crítico que nos dará la región crítica y de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'05, tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0'95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos $z_{1-\alpha}$ **=** (1'64 + 1'65)/2 **= 1'645**, que separa la zona de aceptación y la de rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{8-7}{4/\sqrt{16}} = 1$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba z_0 = 1 está a la izquierda** del punto crítico
$z_{1-\alpha}$ **= 1'645**, **estamos en la zona de aceptación**.

Resumiendo, **aceptamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 7$ para un nivel de significación α = 0'05.**

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, el tiempo medio de atención es inferior o igual a 7 minutos.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Sea el siguiente conjunto de inecuaciones: x - 3y ≤ 8; 3x + 2y ≥ 15; x + 3y ≤ 12; x ≥ 0; y ≥ 0.
a) (1 punto) Dibuje el recinto del plano determinado por estas inecuaciones.
b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.
c) (0'5 puntos) Maximice la función F(x,y) = 5x + 9y en este recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

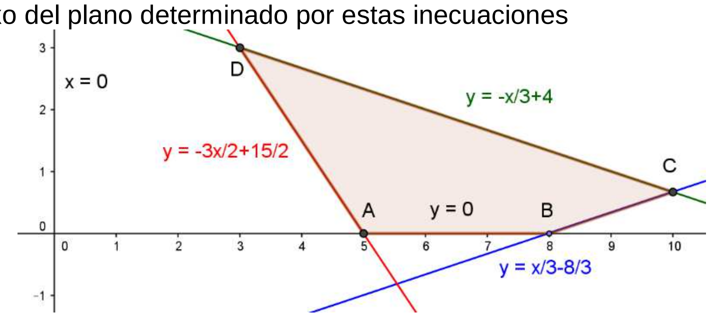
Solución

Sea el siguiente conjunto de inecuaciones: x - 3y ≤ 8; 3x + 2y ≥ 15; x + 3y ≤ 12; x ≥ 0; y ≥ 0.
Dibuje el recinto del plano determinado por estas inecuaciones. Determine los vértices de este recinto.
Maximice la función F(x,y) = 5x + 9y en este recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

Función a optimizar es F(x,y) = 5x + 9y.
Restricciones: x - 3y ≤ 8; 3x + 2y ≥ 15; x + 3y ≤ 12; x ≥ 0; y ≥ 0

Las desigualdades x - 3y ≤ 8; 3x + 2y ≥ 15; x + 3y ≤ 12; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, x - 3y = 8; 3x + 2y = 15; x + 3y = 12; x = 0; y = 0
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = x/3 - 8/3; y = -3x/2 + 15/2; y = -x/3 + 4 x = 0; y = 0

Dibuje el recinto convexo del plano determinado por estas inecuaciones



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 0$ e $y = -3x/2+15/2$, tenemos $0 = -3x/2+15/2 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$, y el vértice es A(5,0).
De $y = 0$ e $y = x/3-8/3$, tenemos $0 = x/3-8/3 \rightarrow x = 8$, y el vértice es B(8,0).
De $y = x/3-8/3$ e $y = -x/3+4$, tenemos $x/3-8/3 = -x/3+4 \rightarrow x-8 = -x+12 \rightarrow 2x = 20$, con lo cual $x = 10$, e $y =$ $= 10/3 – 8/3 = 2/3$, y el vértice es C(10,2/3).
De $y = -x/3+4$ e $y = -3x/2+15/2$, tenemos $-x/3+4 = -3x/2+15/2 \rightarrow -2x+24 = -9x + 45 \rightarrow 7x = 21$, con lo cual $x = 21/7 = 3$, e $y = -3/3 + 4 = 3$, y el vértice es D(3,3).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(5,0), B(8,0), C(10,2/3) y D(3,3).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 5x + 9y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(5,0), B(8,0), C(10,2/3) y D(3,3). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(5,0) = 5(5) + 9(0) = 25$; $F(8,0) = 5(8) + 9(0) = 40$;
F(10,2/3) = $5(10) + 9(2/3)$ **= 56**; $F(3,3) = 5(3) + 9(3) = 42$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 56** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(10,2/3).**

EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
a) (1'3 puntos) Halle el máximo, el mínimo y el punto de inflexión de la función.
b) (0'6 puntos) Calcule los puntos de corte con los ejes.
c) (0'6 puntos) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Se considera la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
a)
Halle el máximo, el mínimo y el punto de inflexión de la función.

Sabemos que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo.
Sabemos que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo.
Sabemos que si $f''(b) = 0$ y $f'''(b) \neq 0$, $x = b$ es un punto de inflexión.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$; $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6}$, de donde $x = 1$ y $x = 2/6 = 1/3$, que serán los posibles extremos relativos.
Como $f''(1) = 6(1) - 4 = 2 > 0$, **x = 1 es un mínimo relativo de la gráfica de f(x) y vale f(1)** $= 1^3 - 2\cdot1^2 + 1 =$ **= 0**.
Como $f''(1/3) = 6(1/3) - 4 = -2 < 0$, **x = 1/3 es un máximo relativo de la gráfica de f(x) y vale f(1/3) =** $= (1/3)^3 - 2\cdot(1/3)^2 + (1/3)$ **= 4/27 ≅ 0'148.**

De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 4 = 0 \rightarrow x = 4/6 = 2/3$, de donde $x = 2/3$ será el posible punto de inflexión.
Como $f'''(2/3) = 6 \neq 0$, **x = 2/3 es el punto de inflexión de la gráfica de f(x) y vale f(2/3) =** $= (2/3)^3 - 2\cdot(2/3)^2 + (2/3)$ **= 2/27 ≅ 0'0741.**
b)
Calcule los puntos de corte con los ejes.

Para x = 0, **punto** (0,f(0)) = **(0,0)**. *Corte con el eje de ordenadas (OY)*.
Para f(x) = 0 $= x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = 0$, de donde $x = 0$ y $x^2 - 2x + 1 = 0$, luego $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} =$ $= 1 \pm 0$, de donde x = 1(doble), y los **puntos** de corte son (0,f(0)) = **(0,0) y** (1,f(1)) = **(1,0)**. *Cortes con el eje de abscisas (OX).*

c)
Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas x = 0 y x = 1.

La ecuación de la recta tangente en x = 0 es: $y – f(0) = f'(0)\cdot(x – 0)$.
$f(0) = (0)^3 – 2(0)^2 + (0) = 0$; $f'(0) = 3(0)^2 – 4(0) + 1 = 1$.
La recta tangente pedida es: $y – 0 = 1\cdot(x – 0)$, de donde **$y = x$** (bisectriz del primer y tercer cuadrante).

La ecuación de la recta tangente en x = 1 es: $y – f(1) = f'(1)\cdot(x – 1)$.
$f(1) = (1)^3 – 2(1)^2 + (1) = 0$; $f'(1) = 3(1)^2 – 4(1) + 1 = 0$.
La recta tangente pedida es: $y – 0 = 0\cdot(x – 0)$, de donde **$y = 0$**, que es una recta horizontal de altura 0 (ecuación del eje de abscisas OX).

EJERCICIO 3 (B)

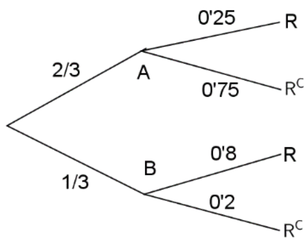
Una empresa dedicada a la producción de jamones ibéricos dispone de dos secaderos, A y B, con distintas condiciones ambientales y de almacenamiento. En el secadero B se curan la tercera parte de los jamones. El 25% de los jamones curados en el secadero A son catalogados como Reserva, mientras que en el B este porcentaje asciende al 80%. Elegido un jamón al azar de uno de los secaderos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) (1’5 puntos) El jamón no es de Reserva.
b) (1 punto) Si el jamón es de Reserva, que proceda del secadero A.

Solución

Una empresa dedicada a la producción de jamones ibéricos dispone de dos secaderos, A y B, con distintas condiciones ambientales y de almacenamiento. En el secadero B se curan la tercera parte de los jamones. El 25% de los jamones curados en el secadero A son catalogados como Reserva, mientras que en el B este porcentaje asciende al 80%. Elegido un jamón al azar de uno de los secaderos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
a)
El jamón no es de Reserva.

Llamemos A, B, R y R^C, a los sucesos siguientes, “secadero A”, " secadero B", “jamón de reserva" y "no es jamón de reserva", respectivamente.
Datos del problema $p(B) = 1/3$; $p(R/A) = 25\% = 0'25$; $p(R/B) = 80\% = 0'8$,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el jamón no es de reserva es:

p(no es de reserva) = $p(R^C)$ = $p(A).p(R^C/A) + p(B).p(R^C/B) = (2/3)\cdot 0'75 + (1/3)\cdot 0'2$ **= 17/30 ≅ 0’567**.

b)
Si el jamón es de Reserva, que proceda del secadero A.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/R) =} \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A).p(R/A)}{1 - p(R^C)} = \frac{(2/3)\cdot 0'25}{1 - (17/30)} \mathbf{= (5/13)} \cong \mathbf{0'385}.$$

EJERCICIO 4 (B)

De una población Normal de media desconocida μ y desviación típica 2 se extrae la siguiente muestra aleatoria simple de tamaño 10:

3’8 6’3 4’3 6 6’2 5’8 1’5 3’3 3’4 2’9

a) (1’5 puntos) Estime, mediante un intervalo de confianza, la media poblacional para un nivel de confianza del 92%. Obtenga su error de estimación.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para reducir ese error a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

Solución

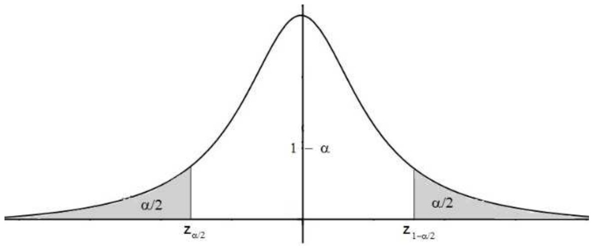
De una población Normal de media desconocida μ y desviación típica 2 se extrae la siguiente muestra aleatoria simple de tamaño 10:

3’8 6’3 4’3 6 6’2 5’8 1’5 3’3 3’4 2’9

a)

Estime, mediante un intervalo de confianza, la media poblacional para un nivel de confianza del 92%. Obtenga su error de estimación.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: n = 10; $\overline{x}$ = (3’8+6’3+4’3+6+6’2+5’8+1’5+3’3+3’4+2’9)/10 = 4’35; σ = 2; nivel de confianza = 92% = 0’92 = 1 - α, de donde α = 0’08, con la cual α/2 = 0’08/2 = 0’04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0’96 no viene, y que la probabilidad más próxima es 0’9599, corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4'35 - 1'75\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}, 4'35 + 1'75\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \cong$ **(3’2432,5’4568)**

También sabemos que **el error máximo de la estimación es menor** que el radio del intervalo, es decir

$E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'75\cdot\frac{2}{\sqrt{10}} \cong$ **1’1068**.

b)

¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para reducir ese error a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

Datos del problema: Error = la mitad del anterior = E ≤ $\frac{1'75}{\sqrt{10}}$, σ = 2, igual nivel de confianza = 92% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1'75}{\sqrt{10}}$, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'75\cdot 2}{1'75/\sqrt{10}}\right)^2$ = 40, es decir **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 40.**