Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 1 Del año 2016

[2'5 puntos] Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = (e^{ax} + b)\cdot x$, con $a \neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 0 y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es x = 1.

Solución

Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = (e^{ax} + b)\cdot x$, con $a \neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 0 y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es x = 1.

Si tiene su gráfica tiene un extremo relativo en x = 0, sabemos que f '(0) = 0.
Si tiene un punto de inflexión en x = 1, sabemos que f ''(1) = 0.

$f(x) = (e^{ax} + b)\cdot x$; $f'(x) = a\cdot e^{ax}\cdot x + (e^{ax} + b)\cdot 1$; $f''(x) = a^2\cdot e^{ax}\cdot x + a\cdot e^{ax}\cdot 1 + a\cdot e^{ax} = a^2\cdot e^{ax}\cdot x + 2a\cdot e^{ax}$.
De $f'(0) = 0 \rightarrow a\cdot e^{a(0)}\cdot(0) + e^{a(0)} + b = 0 \rightarrow 1 + b = 0 \rightarrow$ **b = -1.**
De $f''(1) = 0 \rightarrow a^2\cdot e^{a(1)}\cdot(1) + 2a\cdot e^{a(1)} = 0 \rightarrow a\cdot e^a\cdot(a + 2) = 0$, como $a \neq 0$ y $e^a \neq 0 \rightarrow$ **a = -2.**

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 Del año 2016

[2'5 puntos] Calcula el valor de a > 0 para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = 1$.

Solución

Calcula el valor de a > 0 para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = 1$.

Calculamos primero la indefinida $\int \frac{x}{2+x^2}dx = \left\{\begin{matrix} 2+x^2=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=dt/2 \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt/2}{t} = \frac{\ln(t)}{2} = \frac{\ln(2+x^2)}{2}$, luego

$1 = \int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = \left[\frac{\ln(2+x^2)}{2}\right]_0^a = \left[\frac{\ln(2+a^2)}{2}\right] - \left[\frac{\ln(2)}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2+a^2}{2}\right)$, de donde $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2+a^2}{2}\right) = 1$, es decir

$\ln\left(\frac{2+a^2}{2}\right) = 2$, por reciproca, $\frac{2+a^2}{2} = e^2 \rightarrow a^2 = 2e^2 - 2 \rightarrow a = +\sqrt{2e^2-2}$, porque han dicho que a > 0.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 Del año 2016

Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante AX = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para m = -3 y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que x = 2.

Solución

Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante AX = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a)
Discute el sistema según los valores de m.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1-m \\ -1 & m+2 & m & m \\ 1 & 1 & m+2 & 7 \end{pmatrix}$.

En A, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m+3 & m+2 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1\cdot(m+3)\cdot(m)$.

De det(A) = 0, tenemos m = 0 y m = -3.
Si $m \neq 0$ y $m \neq -3$, $\det(A) \neq 0$, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, **sistema compatible y**

determinado, solución única.

Si m = 0, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 + 1 = 3 ≠ 0, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} F_1 + F_2 \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix}$ = (-1)(-1)(21-3) = 18 ≠ 0, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

Si m = -3, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -1 – 2 = -3 ≠ 0, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} F_1 + F_2 \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

b)

Resuelve el sistema para m = -3 y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que x = 2.

Estamos en el caso anterior *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 3ª) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y - z = 7 \end{cases} \begin{matrix} F_1\text{-}F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{cases} 3z = -3 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$, tenemos z = -1 y x = (7-1) - y, tomando y = a ∈ R la **solución es (x,y,z) = (6 - a,a,-1)** con a∈R.

Preguntan **si** alguna solución tiene **x = 2**, en este mismo caso (m = -3) tenemos 6 – a = 2, de donde a = 4, y la solución pedida es **(x,y,z) = (2,4,-1):**

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 Del año 2016

Considera el plano π de ecuación x + 2y + z = 1.

(a) [1 punto] Halla el punto de π más próximo al punto (3,1,2).

(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

Solución

Considera el plano π de ecuación x + 2y + z = 1.

(a)

Halla el punto de π más próximo al punto (3,1,2).

El punto más próximo del plano del P(3,1,2) es el punto Q proyección ortogonal de P sobre π.

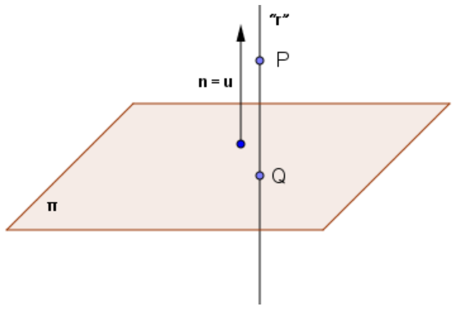
Calculamos la recta "r" perpendicular al plano "π" por el punto P(3,1,2), el vector director de la recta **u** es el vector normal del plano **n** = (1,2,1), es decir **u** = **n** = (1,2,1), y la recta es "r" $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, con λ∈R.

El punto Q pedido es la intersección de la recta "r" con el plano π.

Lo calculamos sustituyendo la recta en el plano:

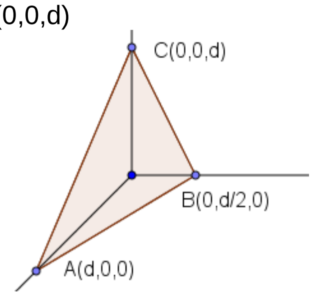
(3+λ) + 2(1+2λ) + (2+λ) = 1 → 6λ + 7 = 1 → 6λ = -6 → λ = -1.

El punto más próximo del plano es Q(3 + (-1), 1 + 2(-1), 2 + (-1)) = **Q(2,-1,1).**



(b)
Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

Un plano paralelo es $\pi' \equiv x + 2y + z = d$ con $d \in R$.
Corte con OX, $\pi' = 0$, $y = z = 0$, punto A(d,0,0)
Corte con OY, $\pi' = 0$, $x = z = 0$, punto B(0,d/2,0)
Corte con OZ, $\pi' = 0$, $x = y = 0$, punto C(0,0,d)



El área del triángulo ABC es 1/2 del área del paralelogramo que determina los vectores **AB** y **AC**, es decir 1/2 del módulo del producto vectorial (x) de los vectores **AB** y **AC**

Tenemos **AB** = (-d,d/2,0), **AC** = (-d,0,d); **AB**x**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & d/2 & 0 \\ -d & 0 & d \end{vmatrix}$ = $\mathbf{i}(d^2/2) - \mathbf{j}(-d^2) + \mathbf{k}(d^2/2) = (d^2/2, d^2, d^2/2)$.

Área = $\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^4/4 + d^4 + d^4/4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3d^4}{2}}$, elevando al cuadrado $6 = (3d^4)/8 \rightarrow d^4 = 16$, de donde

$d = \pm \sqrt[4]{16} = \pm \sqrt[4]{2^4} = \pm 2$, por tanto **hay dos planos que verifiquen que el área del triángulo ABC es** $\sqrt{6}$ **:**

$\pi_1 \equiv \mathbf{x + 2y + z = 2}$ y $\pi_2 \equiv \mathbf{x + 2y + z = -2}$

Opción B

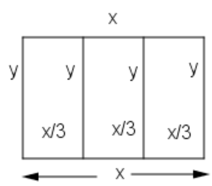
Ejercicio 1 opción B, modelo 1 Del año 2016

[2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

Solución

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.



Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

Función a optimizar L = longitud = 4y + 2x.
Relación Área = x·y = 12800, de donde y = 12800/x.
Función L(x) = 4(12800/x) + 2x = 51200/x + 2x.
L'(x) = - 51200/x^2 + 2. De L'(x) = 0, tenemos 51200/x^2 = 2, luego x^2 = 25600 $\rightarrow$ x = +√(25600) = +160.
Tomamos la solución positiva porque es una longitud.
Veamos que es un mínimo L'(x) = - 51200/x^2 + 2 = - 51200· x^{-2} + 2 $\rightarrow$ L''(x) = (-2)(-51200)·x^{-3}, luego L ''(160) = (102400)/(160^3) > 0, luego x = 160 es un mínimo.
Dimensiones del solar: x = 160 m. e y = 12800/160 m = 80 m.
Dimensiones cada parcela: x/3 = 160/3 m. ≅ 53'333 m. e y = 80 m.

Ejercicio 2 opción B, modelo 1 Del año 2016

[2'5 puntos] Considera la función f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = -x^2 + mx siendo m > 0. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -mx y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

Solución

Considera la función f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = -x^2 + mx siendo m > 0. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -mx y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

La gráfica de f(x) = -x^2 + mx es la de una parábola con las ramas hacia abajo (el número que multiplica a x^2 es negativo) y corta en x = 0 y x = m (soluciones de f(x) = 0).
La gráfica de la recta y = -mx tiene pendiente negativa, y pasa por (0,0) y (-1,m).
La parábola y la recta se cortan en los puntos solución de -x^2 + mx = -mx, es decir x^2 - 2mx = 0 = x(x – 2m), luego se cortan en las abscisas x = 0 y x = 2m.

Área = $36 = \int_0^{2m}(-x^2+2mx)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + m\cdot x^2\right]_0^{2m} = \left[\left(\frac{-8m^3}{3} + 4m^3\right) - (0)\right]u^2 = \frac{4m^3}{3}u^2$, igualando m^3 = 27, de donde **m =** $\sqrt[3]{27}$ = **3**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 Del año 2016

De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:

- la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
- el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.

a) [1'5 puntos] Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C.
b) [1 punto] Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

Solución

De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:

- la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
- el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.

a)
Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C.

De, la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas. $\rightarrow$ B = A + C.
De, el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos. $\rightarrow$ A = (B + C)/2
De, sabiendo que A ha obtenido el doble que C. $\rightarrow$ A = 2C. Entrando con esta en las otras dos tenemos: B = A + C = 2C + C = 3C.
2C = (3C + C)/2 $\rightarrow$ 4C = 4C. De donde **C = C, A = 2C y B = 3C. Obtenemos un sistema indeterminado, donde la empresa A ganaría el doble que la C y la empresa B el triple de la C**
b)
Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

De, la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas. $\rightarrow$ B = A + C.
De, el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos. $\rightarrow$ A = (B + C)/2
De, entre las tres han obtenido 210 millones de euros. $\rightarrow$ A + B + C = 210.

De A = (B + C)/2, tenemos B + C = 2A.
Entrando en A + B + C = 210 $\rightarrow$ A + 2A = 210 = 3A, luego **A = 70 millones**.
B + C = 2A = 140
B - C = A = 70. Sumando 2B = 210, de donde **B = 105 millones.**
De, A + B + C = 210 $\rightarrow$ **C =** 210 – 105 – 70 **= 35 millones.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 Del año 2016

Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y B(3,−1,1) y s la recta dada por $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.
b) [1'25 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s.

Solución

Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y B(3,−1,1) y s la recta dada por $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$

a)
Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.
Para un plano π necesitamos un punto, el O(0,0,0), y dos vectores independientes, el **AB** = (2,-2,1) y el directo de "s" $\equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$, tomando y = $\lambda \in$ R, s $\equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y un vector directo sería **v** = (-2,1,-1).

El plano pedido es $\pi \equiv$ det(**OX,AB,v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = 0 = (x)(2-1) - (y)(-2+2) + (z)(2-4) **= x – 2z = 0**

b)
Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s.

El plano π_1 perpendicular a "s" tiene como vector normal **n** el directo de **u** "s", es decir **n** = **v** = (-2,1,-1).
Un plano paralelo es -2x + y – z = d; como pasa por B(3,−1,1), tenemos -2(3) + (-1) – (1) = d, luego d = 8, y **el plano pedido es** $\pi_1 \equiv$ **-2x + y – z = 8**.
Me piden sus ecuaciones paramétricas para lo cual tomamos tres puntos del plano, elijo los puntos cortes con los ejes.
Con el eje OX, π_1 = 0, y = z = 0, punto P(-4,0,0).
Con el eje OY, π_1 = 0, x = z = 0, punto Q(0,8,0).
Con el eje OZ, π_1 = 0, x = y = 0, punto R(0,0,-8).
Tomo como punto el P(-4,0,0), y como vectores el **PQ** = (4,8,0) y el **PR** = (4,0,-8), y **el plano pedido en paramétricas es** $\pi_1 \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda + 4\mu \\ y = 8\lambda \\ z = -8\mu \end{cases}$