OPCIÓN A

16_mod2_EJERCICIO 1 (A)

Sea la región factible definida por las siguientes inecuaciones: $x + y \le 20$; $x - y \ge 0$; $5x - 13y + 8 \le 0$

a) (1'5 puntos) Represéntela gráficamente y calcule sus vértices.

b) (0'4 puntos) Razone si el punto (3, 2'5) está en la región factible.

c) (0'6 puntos) Determine el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x - y + 6$ en esa región y los puntos en los que se alcanzan

Solución

Sea la región factible definida por las siguientes inecuaciones: $x + y \le 20$; $x - y \ge 0$; $5x - 13y + 8 \le 0$

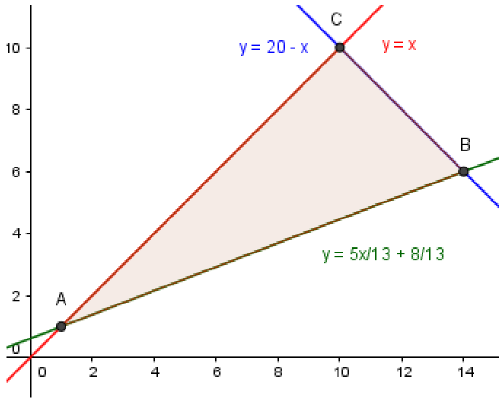
a)

Represéntela gráficamente y calcule sus vértices.

Las desigualdades $x + y \le 20$; $x - y \ge 0$; $5x - 13y + 8 \le 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + y = 20$; $x - y = 0$; $5x - 13y + 8 = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos $y = 20 - x$; $y = x + 5$; $y = 5x/13 + 8/13$

Dibujamos las rectas, $y = 20 - x$; $y = x + 5$; $y = 5x/13 + 8/13$, tenemos en cuenta las desigualdades, observaremos cual es el polígono convexo o región factible y después sacaremos los vértices de dicho polígono convexo.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 5x/13 + 8/13$ e $y = x$, tenemos $5x/13 + 8/13 = x \rightarrow 5x + 8 = 13x \rightarrow 8 = 8x$, luego $x = 8/8 = 1$, con lo cual $y = (1) = 1$, y el punto de corte es A(1,1).

De $y = 5x/13 + 8/13$ e $y = 20 - x$, tenemos $5x/13 + 8/13 = 20 - x \rightarrow 5x + 8 = 260 - 13x \rightarrow$
$\rightarrow 18x = 252$, luego $x = 252/18 = 14$, con lo cual $y = 20 - (14) = 6$, y el punto de corte es B(14,6).

De $y = 20 - x$ e $y = x$, tenemos $20 - x = x \rightarrow 20 = 2x$, luego $x = 20/2 = 10$, con lo cual $y = (10) = 10$, y el punto de corte es C(10,10).

Observamos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(1,1), B(14,6) y C(10,10).

b)

Razone si el punto (3, 2'5) está en la región factible.

El punto (3,2'5) está en la región factible si verifica todas las inecuaciones.

$x + y \le 20$; $\rightarrow$ $(3) + (2'5) \le 20$ $\rightarrow$ $5'5 \le 20$. Cierto

$x - y \ge 0$; $\rightarrow$ $(3) - (2'5) \ge 0$ $\rightarrow$ $0'5 \ge 0$. Cierto

$5x - 13y + 8 \le 0$; $\rightarrow$ $5(3) - 13(2'5) + 8 \le 0$ $\rightarrow$ $-9'5 \le 0$. Cierto, por tanto **el punto (3, 2'5) está en la región factible.**

c)

Determine el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x - y + 6$ en esa región y los puntos en los que se alcanzan

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(1,1), B(14,6) y C(10,10). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(1,1) = (1) – (1) + 6 **= 6**;   **F_B(14,6)** = (14) – (6) + 6 **= 14**; **F_C(10,10)** = (10) – (10) + 6 **= 6**;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 14** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(14,6), y el mínimo absoluto de la función F en la región es 6 (**el menor valor en los vértices**) y se alcanza en los vértices A(1,1) y C(10,10), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento AC.**

16_mod2_EJERCICIO 2 (A)
a) (1'2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2-1)\cdot(3x^3+5x)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

b) (0'7 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
c) (0'6 puntos) Determine, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de la función h(x).

Solución

a)
Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2-1)\cdot(3x^3+5x)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

$f(x) = (x^2-1)\cdot(3x^3+5x)^3$; $f'(x) = 2x\cdot(3x^3+5x)^3 + (x^2-1)\cdot 3\cdot(3x^3+5x)^2\cdot(9x^2+5)$.

$$g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}; \quad g'(x) = \frac{\frac{3}{x}\cdot e^{3x} - \ln(3x)\cdot 2\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{3\cdot e^{3x} - 2x\cdot\ln(3x)\cdot e^{2x}}{x\cdot e^{4x}}.$$

b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente en x = 1 es "y – h(1) = h '(1)·(x – 1)"

$h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$; de donde h(1) = 9/3 = 3

$h'(x) = \frac{3\cdot(2x+1) - (3x+6)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}$; de donde h '(1) = -9/9 = -1.

La recta tangente pedida es "y – 3 = -1·(x – 1)"

c)
Determine, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de la función h(x).

La función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$, es una función racional, por tanto tiene por asíntotas verticales los números que anulan el denominador, y si numerador y denominador tienen igual grado, tiene asíntota horizontal, y es la misma en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to -1/2^+} h(x) = \lim_{x\to -1/2^+}\left(\frac{3x+6}{2x+1}\right) = \frac{3(-1/2)+6}{2(-1/2)+1} = \frac{21/4}{0^+} = +\infty$, **la recta x = -1/2 es una asíntota vertical de h(x).**

Como $\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+6}{2x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right) = 3/2$, **la recta y = 3/2 es una asíntota horizontal en $\pm\infty$.**

16_mod2_EJERCICIO 3 (A)
En un centro de estudios que tiene 250 estudiantes, hay 50 que tienen problemas visuales y 20 que tienen problemas auditivos. Los sucesos "tener problemas visuales" y "tener problemas auditivos" son independientes.
Se elige un estudiante al azar, calcule las probabilidades de los sucesos siguientes:
a) (0'75 puntos) Tener problemas visuales y auditivos.
b) (0'75 puntos) No tener problemas visuales ni auditivos.
c) (1 punto) Tener algún problema auditivo si no tiene problemas visuales.

Solución

En un centro de estudios que tiene 250 estudiantes, hay 50 que tienen problemas visuales y 20 que tienen problemas auditivos. Los sucesos "tener problemas visuales" y "tener problemas auditivos" son independientes.

Se elige un estudiante al azar, calcule las probabilidades de los sucesos siguientes:
a)
Tener problemas visuales y auditivos.

Sean los sucesos A =" tener problemas visuales" y B = "tener problemas auditivos".
Nos dan p(A) = 50/250 = 0'2, p(B) = 20/250 = 0'08, A y B independientes $p(A \cap B) = p(A).p(B) = 0'2 \cdot 0'08 =$
$= 0'016$

Me están pidiendo **$p(A \cap B) = 0'016$**
b)
No tener problemas visuales ni auditivos.

Me piden **$p(noA\ y\ noB) = p(A^C \cap B^C)$** = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A \cup B)$ =**
** = 1 – 0'264 = **0'736**.

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, tenemos $p(A \cup B) = 0'2 + 0'08 – 0'016 = 0'264$
c)
Tener algún problema auditivo si no tiene problemas visuales.
Me están pidiendo **$p(B/A^C)$ =** $\dfrac{p\left(B \cap A^C\right)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p\left(A \cap B\right)}{1 - p(A)}$ = (0'08 – 0'016)/(1 – 0'2) **= 0'08**.

16_mod2_EJERCICIO 4 (A)
Se sabe que el diámetro de las estrellas de mar de una región sigue una ley Normal con varianza 2'25 cm^2.
Se sospecha que, igual que ocurre en otras regiones, su diámetro no supera los 11'7 cm ($H_0 : \mu \le 11'7$).
Para confirmarlo se extrae una muestra aleatoria de estrellas de mar de esa región, obteniéndose los siguientes diámetros:

12'5 11'8 13'1 14'3 11'7 12'6 12'7 12'1 13'5 11'5

a) (1'75 puntos) Plantee un contraste de hipótesis, y para un nivel de significación del 5%, obtenga la región de rechazo del contraste. ¿Se puede confirmar la sospecha?
b) (0'75 puntos) ¿Y para un nivel de significación del 3%, se puede confirmar la sospecha?

Solución

Se sabe que el diámetro de las estrellas de mar de una región sigue una ley Normal con varianza 2'25 cm^2.
Se sospecha que, igual que ocurre en otras regiones, su diámetro no supera los 11'7 cm ($H_0 : \mu \le 11'7$).
Para confirmarlo se extrae una muestra aleatoria de estrellas de mar de esa región, obteniéndose los siguientes diámetros:

12'5 11'8 13'1 14'3 11'7 12'6 12'7 12'1 13'5 11'5

a)
Plantee un contraste de hipótesis, y para un nivel de significación del 5%, obtenga la región de rechazo del contraste. ¿Se puede confirmar la sospecha?

Del problema tenemos varianza poblacional = $\sigma^2 = 2'25$, de donde $\sigma = 1'5$, tamaño de la muestra n = 10, media poblacional = $\mu_0 = 11'7$, y media muestral $\bar{x}$ =
= (12'5+11'8+13'1+14'3+11'7+12'6+12'7+12'1+13'5+11'5)/10 =12'58, luego $X \to N(11'7,1'5)$, y *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(11'7, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(11'7, \dfrac{1'25}{\sqrt{10}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.
También nos dicen que $H_0 : \mu_0 \le 11'7$, con un nivel de significación de α = 5% = 0'05.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

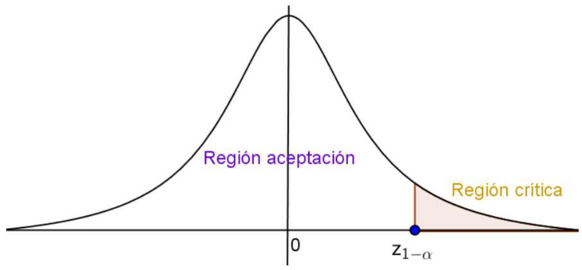
El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \le 11'7$ (el diámetro de las estrellas de mar no supera los 11'7cm) y $H_1 : \mu_1 > 11'7$, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste unilateral por la derecha*, *por tanto la región crítica está a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$* .

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.
Para el nivel de significación es $\alpha = 0'05$, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = $1 - \alpha = 0'95$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos son 0'9495 y 0'9505, que corresponden 1'64 y 1'65 luego el **valor crítico es $z_{1-\alpha}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645**, que separa las zonas de aceptación y rechazo. *La región crítica es el intervalo (1'645,+∞)*

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{12'58 - 11'7}{1'5/\sqrt{10}} \cong 1'855$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba $z_0 \cong$ 1'885 está a la derecha** del punto crítico **$z_{1-\alpha}$ = 1'645**, **estamos en la zona de rechazo o región crítica**.

Resumiendo, **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le$ 11'7 para un nivel de significación α = 0'05 y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: μ_0 > 11'7**

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, concluimos que el diámetro de las estrellas de mar supera los 11'7cm.

b)

¿Y para un nivel de significación del 3%, se puede confirmar la sospecha?

Lo único que varía es el punto crítico:

Para el nivel de significación es α = 0'03, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0'97.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'03 = 0'97$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'9699, que corresponde **al valor crítico es $z_{1-\alpha}$ = 1'88**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba $z_0 \cong$ 1'855 está a la izquierda** del punto crítico **$z_{1-\alpha}$ = 1'88**, **estamos en la zona de aceptación**.

Resumiendo, **aceptamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le$ 11'7 para un nivel de significación α = 0'03.**

Con lo cual, con un nivel de significación del 3%, concluimos que el diámetro de las estrellas de mar no supera los 11'7cm.

OPCION B

16_mod2_EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot (B \cdot B^t) = (1/2) \cdot A – 2A^t$.

b) (1 punto) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante:

$A \cdot B$, $A \cdot B^t$, $B \cdot A^{-1}$, $B^t \cdot A + A^{-1}$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Resuelva la ecuación matricial $X\cdot(B\cdot B^t) = (1/2)\cdot A - 2A^t$.

$B\cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = C$. Como det(C)= 10 -1 = 9 $\neq$ 0, la matriz C tiene inversa $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$

Multiplicando la expresión $X\cdot C = (1/2)\cdot A - 2A^t$, por la derecha por C^{-1} tenemos:

$X\cdot C\cdot C^{-1} = ((1/2)\cdot A - 2A^t)\cdot C^{-1} \rightarrow X\cdot I = ((1/2)\cdot A - 2A^t)\cdot C^{-1} \rightarrow$ $\mathbf{X = ((1/2)\cdot A - 2A^t)\cdot C^{-1}}$

$(1/2)\cdot A - 2A^t = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$, det(C) = 9 , $C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, luego:

$\mathbf{X = ((1/2)\cdot A - 2A^t)\cdot C^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -21 & 15 \\ -54 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) (1 punto) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante: $A\cdot B$, $A\cdot B^t$, $B\cdot A^{-1}$, $B^t\cdot A + A^{-1}$.

Para poder multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª tiene que coincidir con el número de filas de la 2ª, y el resultado tiene filas de la 1ª matriz y columnas de la 2ª matriz; y para poder sumar matrices deben de tener el mismo orden.

$A\cdot B = A_{2x\mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{2}x3}$, **si se puede multiplicar** y sale una matriz de orden 2x3.

$A\cdot B^t = A_{2x\mathbf{2}}\cdot B^t_{\mathbf{3}x2}$, **no se puede multiplicar**.

$B\cdot A^{-1} = B_{2x\mathbf{3}}\cdot A^{-1}_{\mathbf{2}x2}$, **no se puede multiplicar**.

$B^t_{3x\mathbf{2}}\cdot A_{\mathbf{2}x2} + A^{-1}_{2x2}$. **se puede multiplicar $B^t\cdot A$** y sale una **matriz de orden 3x2**, pero **no se puede sumar con A^{-1}**, **puesto que tiene un orden distinto 2x2**.

16_mod2_EJERCICIO 2 (B)

La función de costes de una fábrica, f(x), en miles de euros, viene dada por la expresión:

$$f(x) = 2x^2 - 36x + 200,$$

donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos.

a) (0'8 puntos) Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo.

b) (0'8 puntos) A partir del signo de f ´(7), ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos?

c) (0'9 puntos) Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000 €?

Solución

La función de costes de una fábrica, f(x), en miles de euros, viene dada por la expresión: $f(x)=2x^2-36x+200$, donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos.

a)
Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo.

La gráfica de f(x) es la de una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (porque el número que multiplica a x^2 es positivo, luego me están pidiendo su mínimo (el vértice de la parábola).

Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de f.

De $f(x) = 2x^2 - 36x + 200$, tenemos f '(x) = 4x – 36 y f ''(x) = 4 > 0, luego **salga lo que salga es mínimo**.

Si f '(x) = 0, tenemos 4x – 36 = 0, de donde x = 9; es decir **el mínimo se alcanza en x = 9 y vale f(9)** =
$= 2(9)^2 - 36(9) + 200$ **= 38, es decir los costes son 38000 € fabricando 9000 kg del producto.**

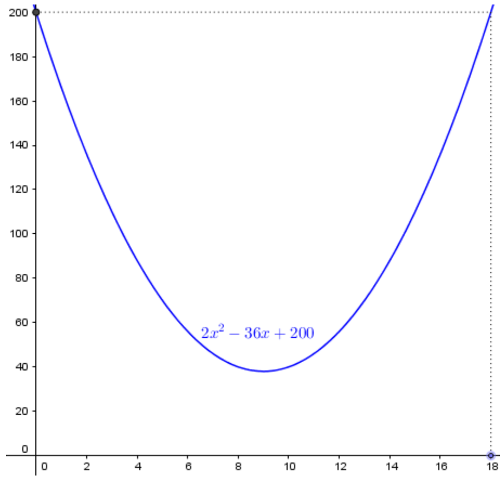
b)
A partir del signo de f ´(7), ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos?

Sabemos que si *f '(x) > 0, f(x) es estrictamente creciente* $(\nearrow)$.

Como f '(x) = 4x – 36 tenemos f '(7) = 4(7) – 36 = - 8 < 0, es decir para x = 7 la función es estrictamente decreciente, **por tanto para 7000 kg <u>decrece</u> el coste de la producción.**

c)
Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000€?

Ya hemos indicado que la gráfica de f(x) es la de una parábola con las ramas hacia arriba ∪, y vértice en su mínimo V(9,38), Le damos un par de valores a "x". Para x = 8 tenemos f(8) = 40 y para x = 10 tenemos f(10) = 40, y ya podemos dibujarla.



Me piden además que resuelva la ecuación f(x) = 200, es decir $2x^2 - 36x + 200 = 200$, de donde:
$2x^2 - 36x = 0 = x\cdot(2x - 36)$ **de donde x = 0 y x = 18, es decir para que el coste sea de 200000€ hay que fabricar 0 ó 18000 kg de material.**

16_mod2_EJERCICIO 3 (B)

En un aeropuerto internacional operaron 300000 vuelos en un determinado año, distribuidos de la siguiente forma: 150000 en la terminal A, 100000 en la B y 50000 en la C. En ese año se sabe que sufrieron retrasos el 10% de los vuelos de la terminal A, el 8% de la B y el 5% de la C. Determine, para un vuelo elegido al azar, las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (1'25 puntos) Que no sufriera retraso.

b) (1'25 puntos) Que operase en la terminal A, sabiendo que tuvo retraso.

Solución

En un aeropuerto internacional operaron 300000 vuelos en un determinado año, distribuidos de la siguiente forma: 150000 en la terminal A, 100000 en la B y 50000 en la C. En ese año se sabe que sufrieron retrasos el 10% de los vuelos de la terminal A, el 8% de la B y el 5% de la C. Determine, para un vuelo elegido al azar, las probabilidades de los siguientes sucesos:

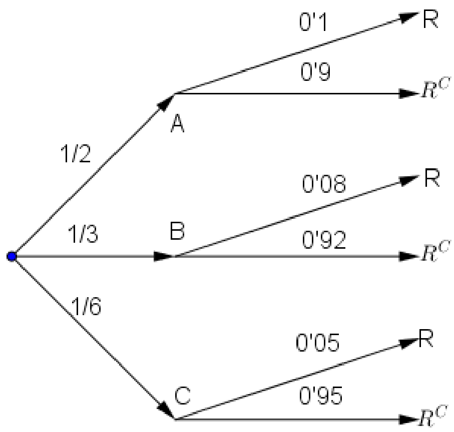
a)

Que no sufriera retraso.

Llamemos A, B, C, R y R^C, a los sucesos siguientes, "terminal A", "terminal B", "terminal C", "vuelo con retraso" y "vuelo sin retraso", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 150000/300000 = 1/2; p(B) = 100000/300000 = 1/3; p(C) = 50000/300000 = = 1/6; p(R/A) = 10% = 0'1; p(R/B) = 8% = 0'08, p(R/C) = 5% = 0'05 ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(no sufriera retraso) = p(R^C) = p(A).p(R^C/A) + p(B).p(R^C/B) + p(C).p(R^C/C) =

= (1/2)·(0'9) + (1/3)·(0'92) + (1/6)·(0'95)**= 183/200 = 0'915**.
b)
Que operase en la terminal A, sabiendo que tuvo retraso.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

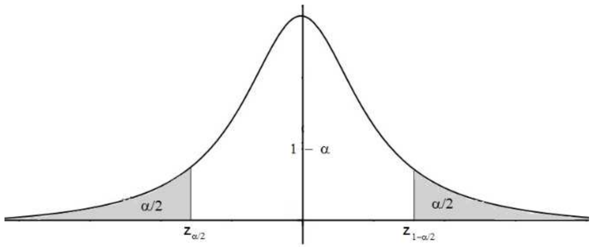
$$\mathbf{p(A/R)} = \frac{p(A\cap R)}{p(R)} = \frac{p(A).p(R/A)}{1 - p(R^C)} = \frac{(1/2)\cdot(0'1)}{1 - 0'915} \mathbf{= 10/17 \cong 0'588}.$$

16_mod2_EJERCICIO 4 (B)
El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0'5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.

Solución

El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.

Datos del problema: σ = 16, n = 100; $\overline{x}$ = 247; nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual α/2 = 0'03/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene y corresponden a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(247 - 2'17\cdot\frac{16}{\sqrt{100}}, 247 + 2'17\cdot\frac{16}{\sqrt{100}}\right)$ **= (243'528,250'472)**

b)
Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0'5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: Error = E ≤ 1, σ = 16, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene y corresponden a 1'96, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'96 \cdot 16}{1}\right)^2$ = 983'4496, es decir **el tamaño mínimo es de n = 984 paquetes de azúcar.**