OPCIÓN A

17_mod3_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $A^2 + B^3$.

b) (1’5 puntos) Calcule X en la ecuación matricial $(A+ B)\cdot X = A- B$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

Calcule $A^2 + B^3$.

$$A^2 + B^3 = A\cdot A + (B\cdot B)\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}. \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

b)

Calcule X en la ecuación matricial $(A+ B)\cdot X = A- B$.

Llamamos $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La expresión $(A+ B)\cdot X = A- B$, la podemos escribir como $C\cdot X = A- B$

Como $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$, existe la matriz inversa $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj((C)^t)$.

De $C\cdot X = A- B$, multiplicando ambos miembros por la izquierda por C^{-1} tenemos:

$C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot(A - B) \rightarrow I\cdot X = C^{-1}\cdot(A - B) \rightarrow$ $\mathbf{X = C^{-1}\cdot (A - B)}$.

Calculamos $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj((C)^t)$, $|C| = -4$; $C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj((C)^t) = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$. Tenemos $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego la matriz es $\mathbf{X = C^{-1}\cdot (A - B) =} \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -21 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 21/4 & 7/2 \end{pmatrix}$.

17_mod3_EJERCICIO 2 (A)

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000$, $50 \le x \le 350$.

a) (0’8 puntos) ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?

b) (1 punto) ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

c) (0’7 puntos) Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.

Solución

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000$, $50 \le x \le 350$.

a)

¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?

Para **x = 100**, **tenemos B(x) =** $-(100)^2 + 360(100) - 18000 =$ **8000 € de beneficio.**

Me piden resolver la ecuación $B(x) = 13500 \rightarrow -x^2 + 360x - 18000 = 13500 \rightarrow 0 = x^2 - 360x + 31500 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{360 \pm \sqrt{129600 - 126000}}{2} = \frac{360 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{360 \pm 60}{2}$, de donde x = 150 y x = 210; es decir **para obtener un beneficio de 13500 €, hay que vender 150 unidades o 210 unidades.**

(b) y parte del (c)
¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

La gráfica de la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000$, $50 \le x \le 350$, es un trozo de parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el número que multiplica a x^2 es negativo.

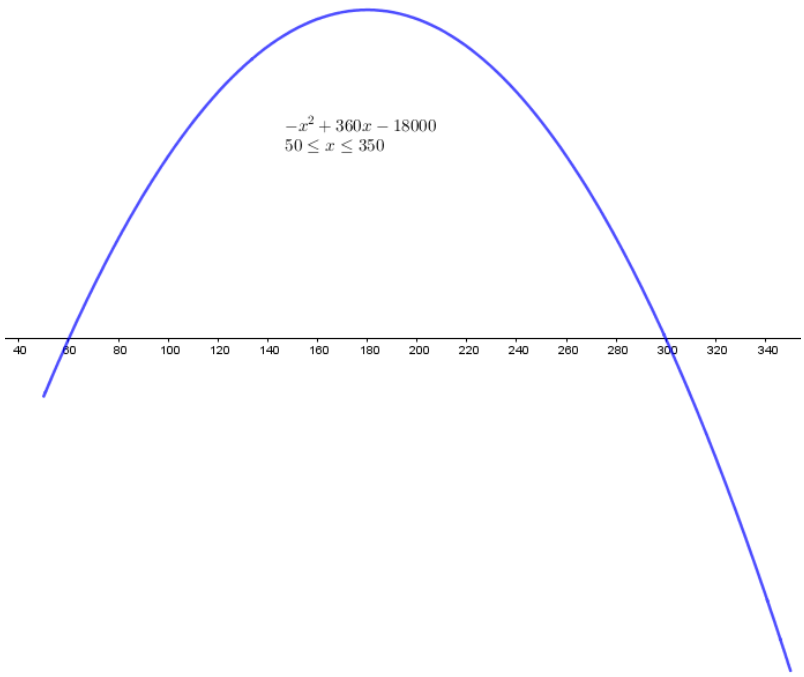
Su vértice, que en este caso es el máximo relativo y absoluto, al ser la gráfica de la parábola así $\cap$, tiene la abscisa "x" del máximo en la solución de la ecuación $B'(x) = 0 = -2x + 360$, de donde $x = 180$ y el vértice es $V(180,B(180)) = V(9,14400)$.
$B(180) = -(180)^2 + 360(180) - 18000 = 14400$.

Como en x = 180 está el máximo, el beneficio máximo es de 14400 €

Para terminar la gráfica del trozo de parábola, calculamos B(50) y B(350) que son los extremos del intervalo:

$B(50) = -(50)^2 + 360(50) - 18000 = -2500$. Punto (50,-2500)
$B(350) = -(350)^2 + 360(350) - 18000 = -14500$. Punto (350,-14500)

Un esbozo del trozo de la gráfica de la parábola, con los tres puntos anteriores incluyendo el vértice es:



También me piden unidades que hay que vender para no obtener perdidas, para lo cual hay que resolver la ecuación $B(x) = -x^2 + 360x - 18000 = 0 = +x^2 - 360x + 18000$ (si nos fijamos en la gráfica saldrá x = 60 y x = 300).

De $x^2 - 360x + 18000 = 0 \rightarrow x = \dfrac{360 \pm \sqrt{129600 - 72000}}{2} = \dfrac{360 \pm \sqrt{57600}}{2} = \dfrac{360 \pm 240}{2}$, de donde x = 60 y x = 300, es decir **para no obtener perdidas hay que vender entre 60 y 300 unidades.**

17_mod3_EJERCICIO 3 (A)
Sean A, B y C tres sucesos de los que se sabe que A y B son independientes, A y C son incompatibles, $p(A) = 0'4$, $p(A \cap B) = 0'1$ y $p(C) = 0'2$. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (1'25 puntos) Que suceda A si no sucede B.
b) (0'75 puntos) Que no suceda ni A ni C.
c) (0'5 puntos) Que si no sucede B tampoco suceda A.

Solución

Sean A, B y C tres sucesos de los que se sabe que A y B son independientes, A y C son incompatibles, $p(A) = 0'4$, $p(A \cap B) = 0'1$ y $p(C) = 0'2$. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a)
Que suceda A si no sucede B.

Del problema tenemos: p(A) = 0'4; $p(A \cap B)$ = 0'1; p(C) = 0'2; A y B independientes es decir $p(A \cap B)$ =
= $p(A) \cdot p(B) \rightarrow$ 0'1 = 0'4·p(B), de donde p(B) = 0'1/0'4 = 0'25; A y C son incompatibles es decir $p(A \cap C)$ = 0.

Me piden **$p(A/B^C)$** = $\frac{p\left(A \cap B^C\right)}{p(B^C)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{0'4 - 0'1}{1 - 0'25} = \frac{0'3}{0'75}$ = **2/5 = 0'4.**

b)
Que no suceda ni A ni C.

Me piden **$p(A^C \cap C^C)$ =** {Ley de Morgan} = $p(A \cup C)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A \cup C)$ = {++} = 1 - 0'6 **= 0'4**

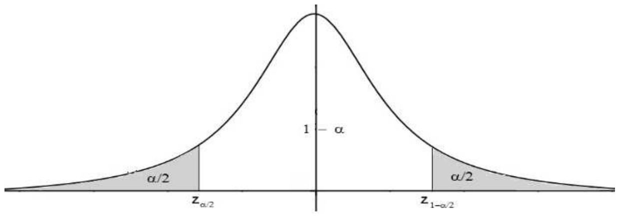
{++} $p(A \cup C)$ = p(A) + p(C) - $p(A \cap C)$ = 0'4 + 0'2 - 0 = 0'6
c)
Que si no sucede B tampoco suceda A.
Me piden **$p(A^C/B^C)$** = $\frac{p\left(A^C \cap B^C\right)}{p(B^C)} = \{++\} = \frac{9/20}{0'75}$ = **3/5 = 0'6.**
{++} $p(A^C \cap B^C) = p(A \cup B)^C = 1 - p(A \cup B)$ = 1 - (p(A) + p(B) - $p(A \cap B)$) = 1 – (0'4 + 0'25 – 0'1) = 9/20.

17_mod3_EJERCICIO 4 (A)
Se desea estimar el porcentaje de alumnos de un determinado instituto que lleva gafas. Para ello se eligen 300 alumnos, de los que 210 llevan gafas.
a) (1'5 puntos) Calcule el intervalo de confianza para la proporción de alumnos que lleva gafas, con un nivel de confianza del 97 %.
b) (1 punto) Si por estudios en otros institutos se sabe que la proporción de alumnos que lleva gafas es del 70 %, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con una confianza del 97 %, el error máximo que se cometa sea inferior a 0'06.

Solución

Se desea estimar el porcentaje de alumnos de un determinado instituto que lleva gafas. Para ello se eligen 300 alumnos, de los que 210 llevan gafas.

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue* una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y gen*eralmente escribimos **p*** $\approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* ***p*** $\rightarrow N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

*I.C.(**p**)* = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ = *(b-a)*

donde $z_{1 - \alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1 - \alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.
El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es n >* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2}$.

a)
Calcule el intervalo de confianza para la proporción de alumnos que lleva gafas, con un nivel de confianza del 97 %.

Datos del problema: n = 300; $\hat{p}$ = 210/300 = 0’7, $\hat{q}$ = 1 - 0’7 = 0’3, nivel de confianza = 97% = 0’97 = 1 - α, de donde α = 0’03, con la cual α/2 = 0’03/2 = 0’055.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0’015 = 0’985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’985 viene y corresponden a 2’17, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(**p**) = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = = \left(0'7 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{300}}, 0'7 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{300}}\right) \cong$ **(0’6426; 0’7574).**

b)
Si por estudios en otros institutos se sabe que la proporción de alumnos que lleva gafas es del 70 %, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con una confianza del 97 %, el error máximo que se cometa sea inferior a 0’06.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’7, $\hat{q}$ = 0’3, error = E ≤ 0’06, nivel de confianza el mismo 97%, al cual le correspondía un punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \geq \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot 0'7\cdot 0'3}{(0'06)^2}$ = 274’69, por tanto **el tamaño mínimo de los alumnos que hay que seleccionar es n = 275.**

OPCIÓN B

17_mod3_EJERCICIO 1 (B)
a) (1’2 puntos) Represente el recinto dado por las siguientes inecuaciones:

y ≤ x + 3   x + 5y ≥ 3   2x + 7y ≤ 30   y ≥ 0

b) (0’5 puntos) Razone si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior.
c) (0’8 puntos) Obtenga los valores mínimo y máximo de la función F(x, y) = x − y en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

Solución

(a), (b) y (c).
a) Represente el recinto dado por las siguientes inecuaciones: y ≤ x + 3; x + 5y ≥ 3; 2x + 7y ≤ 30; y ≥ 0
b) Razone si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior.
c) Obtenga los valores mínimo y máximo de la función F(x, y) = x − y en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

Función a optimizar es F(x,y) = x - y.
Restricciones: y ≤ x + 3; x + 5y ≥ 3; 2x + 7y ≤ 30; y ≥ 0

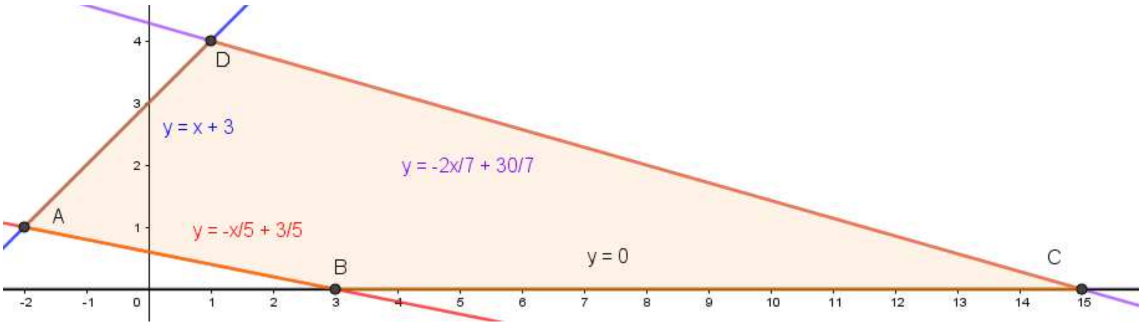
(b) para ver si el punto (5,3) pertenece al recinto, observamos si verifica las tres inecuaciones a la vez:

y ≤ x + 3	→ 3 ≤ 5 + 3	→ 3 ≤ 8. CIERTO
x + 5y ≥ 3	→ 5 + 5(3) ≥ 3	→ 20 ≥ 3. CIERTO
2x + 7y ≤ 30	→ 2(5) + 7(3) ≤ 30	→ 31 ≤ 30. **FALSO**
y ≥ 0	→ y ≥ 0	→ 3 ≥ 0. CIERTO

Como el punto (5,3) no verifica una de las inecuaciones, **dicho punto (5,3) no pertenece al dominio cerrado convexo.**
(a) y (c)
Las desigualdades y ≤ x + 3; x + 5y ≥ 3; 2x + 7y ≤ 30; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, y = x + 3; x + 5y = 3; 2x + 7y = 30; y = 0

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos y = x + 3; y = 3/5 – x/5; y = -2x/7 + 30/7; y = 0

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, que es el polígono convexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



De y = x+3 e y = -x/5+3/5, tenemos x+3 = -x/5+3/5 → 5x+15 = -x+3 → 6x = -12, de donde x = -2 y la ordenada es y = x+(-2) = 1, y el vértice es A(-2,1).
De y = -x/5+3/5 e y = 0, tenemos -x/5+3/5 = 0 → -x+3 = 0, de donde x = 3, y el vértice es B(3,0).
De y = 0 e y = -2x/7+30/7, tenemos 0 = -2x/7+30/7→ 0 = -2x+30→ 2x = 30, con lo cual x = 15, y el vértice es C(15,0).
De y = x+3 e y = -2x/7+30/7, tenemos x+3 = -2x/7+30/7 → 7x+21 = -2x+30 → 9x = 9, con lo cual x = 1, e y = (1)+3 = 4, y el vértice es D(1,4).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(-2,1), B(3,0), C(15,0) y D(1,4).

Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = x - y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(-2,1), B(3,0), C(15,0) y D(1,4). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(-2,1) = (-2) - (1) **= -3**; F_B(3,0) = (3) - (0) = 3;
F_C(15,0) = (15) - (0) **= 15**; **F_D(1,4) =** (1) - (4) **= -3**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 15** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(15,03), y el mínimo absoluto de la función F en la región es -3** (el menor valor en los vértices) **y se alcanza en los vértices A(-2,1) y D(1,4), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento AD.**

17_mod3_EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) (1’5 puntos) Calcule el valor de a y b, para que la función sea derivable en x = 0.
b) (1 punto) Para a = 1 y b = 2, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 2.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)
Calcule el valor de a y b, para que la función sea derivable en x = 0.

Sabemos que si una función es derivable en x = 0, también es continua en x = 0.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 0.

f(x) es continua en x = 0 si $f(2) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - bx - 1) = (0)^2 - b(0) + 1 = 1$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{a}{x-1}\right) = \left(\dfrac{a}{0-1}\right)$ = -a, como son iguales tenemos 1 = -a, **de donde a = -1.**

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$; tenemos $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - b & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(0-1)^2} = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - b) = 0 - b = -b$, como son iguales tenemos **1 = -b,** de donde **b = -1.**

La función f es continua y derivable en x = 0, para a = b = -1.

b)

Para a = 1 y b = 2, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 2.

Nuestra función es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, y su derivada $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y ya hemos visto en el apartado (a) que es continua y derivable en todo R.

Vemos x = 2 está en la rama x ≥ 0, luego $f(x) = x^2 - 2x - 1$ y $f'(x) = 2x - 2$.

La recta tangente en x = 2 es $y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2)$

$f(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow f(2) = (2)^2 - 2(2) - 1 = -1$.

$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2(2) - 2 = 2$

La recta tangente en x = 2 es **y - (-1) = 2·(x - 2)**, de donde **y = 2x - 5.**

17_mod3_EJERCICIO 3 (B)

Para superar una asignatura un estudiante hace un examen teórico y otro práctico. La probabilidad de que apruebe el examen teórico es 0’8, la de que apruebe el examen práctico es 0’6 y la de que apruebe ambos es 0’5.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen práctico en caso de no haber aprobado el examen teórico?

c) (0’5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “aprobar el examen teórico” y “aprobar el examen práctico”?

Solución

Para superar una asignatura un estudiante hace un examen teórico y otro práctico. La probabilidad de que apruebe el examen teórico es 0’8, la de que apruebe el examen práctico es 0’6 y la de que apruebe ambos es 0’5.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

Llamemos A y B a los sucesos "Examen teórico” y “Examen práctico”, respectivamente

Datos del problema: p(apruebe el examen teórico) = p(A) = 0’8; p(apruebe el examen práctico) = p(B) = 0’6; p(apruebe ambos exámenes) = $p(A\cap B)$ = 05;

Me están pidiendo **p(aprobar alguno de los exámenes) = p(A ó B) = $p(A\cup B)$ =**

= $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0’8 + 0’6 - 0’5 **= 0’9.**

b)

¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen práctico en caso de no haber aprobado el examen teórico?

Me están pidiendo **p(B condicionado a noA) = $p(B/A^C)$ =** $\dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p(A\cap B)}{1 - p(A)} =$

= (0’6 - 0’5)/(1 - 0’8) **= 1/2 = 0’5.**

c)

¿Son independientes los sucesos “aprobar el examen teórico” y “aprobar el examen práctico”?

Sabemos que dos sucesos A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.

Como **$p(A\cap B)$ = 0’5 ≠ p(A)·p(B)** = 0’8·0’6 **= 0’48**, **los sucesos “aprobar el examen teórico” y “aprobar el examen práctico” no son independientes.**

17_mod3_EJERCICIO 4 (B)

Se sabe que el peso de los tarros de mermelada que fabrica una empresa sigue una distribución Normal con desviación típica 25 g. Con objeto de estimar el peso medio de los tarros fabricados por esa empresa se selecciona una muestra aleatoria de 100 tarros de esa fábrica obteniéndose un peso medio de 230 g.

a) (1'3 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 96 %, para la media de la población.

b) (0'2 puntos) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?

c) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido al construir un intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza, sea 2 g.

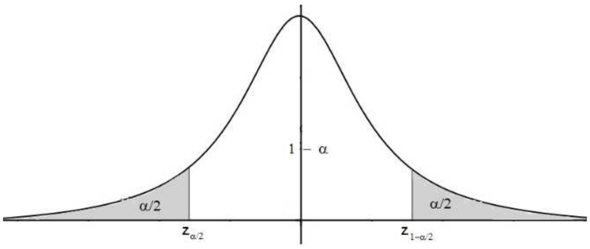
Solución

Se sabe que el peso de los tarros de mermelada que fabrica una empresa sigue una distribución Normal con desviación típica 25 g. Con objeto de estimar el peso medio de los tarros fabricados por esa empresa se selecciona una muestra aleatoria de 100 tarros de esa fábrica obteniéndose un peso medio de 230 g.

a)

Calcule un intervalo de confianza, al 96 %, para la media de la población.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b); también sabemos que $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo* de *confianza de las medias, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: σ = 25; n = 100; $\overline{x}$ = 230; nivel de confianza = 96% = 0'96 = 1 - α, de donde α = 0'04, con la cual α/2 = 0'04/2 = 0'02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'98 no viene, y que la probabilidad más próxima es 0'9798, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'05$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(230 - 2'05\cdot\frac{25}{\sqrt{100}}, 230 + 2'05\cdot\frac{25}{\sqrt{100}}\right)$ **= (224'875,235'125) gramos.**

b)

¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?

Sabemos que el error máximo cometido es **E** ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = (2'05·25)/√(100) = = (2'05·25)/10 **= 5'125 gramos.**

c)

Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido al construir un intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza, sea 2 g.

Datos del problema: σ = 25; error = E ≤ 2; nivel de confianza el mismo 96% , por tanto el punto crítico es $z_{1-\alpha/2} = 2'05$.

De error E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'05\cdot 25}{2}\right)^2$ ≅ 656'641, tenemos que **el tamaño mínimo es de n = 657 tarros.**