OPCIÓN A

17_mod6_EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) Una joyería elabora dos tipos de collares a partir de perlas blancas, grises y negras. Para un collar de tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 negras, mientras que para un collar del tipo B, 10 perlas blancas, 20 grises y 60 negras. Se dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, mientras que es necesario que se utilicen al menos 1800 perlas negras.
Sabiendo que cada collar del tipo A le supone a la joyería un beneficio de 600 euros y cada collar del tipo B, 500 euros, calcule cuál debe ser la producción para obtener el máximo beneficio, así como a cuánto asciende el mismo. ¿Es posible fabricar 40 collares del tipo A y 20 del tipo B?

Solución

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de collares del tipo A.
Sea y = nº de collares del tipo B.

	Perla blanca	Perla gris	Perla negra	Precio
Collar tipo A (x)	20	20	30	600 €
Collar tipo B (y)	10	20	60	500 €
Total	900	1400	(≥) 1800	

De "collar de tipo A hacen falta 20 perlas blancas y collar del tipo B, 10 perlas blancas."
→ $20x + 10y \le 900$.
De "collar de tipo A hacen falta 20 perlas grises y collar del tipo B, 20 perlas grises"
→ $20x + 20y \le 1400$.
De "collar de tipo A hacen falta 30 perlas negras y B, 60 perlas negras. Es necesario que se utilicen al menos 1800 perlas negras" → $30x + 60y \ge 1800$.
De "se fabrica al menos un collar tipo A y tipo B" → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

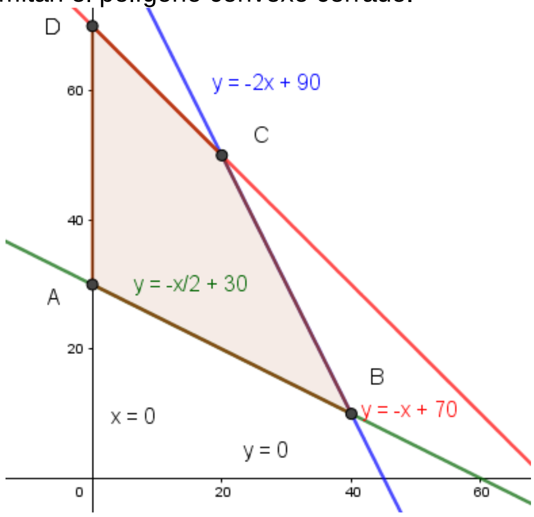
De "cada collar del tipo A le supone a la joyería un beneficio de 600 euros y cada collar del tipo B, 500 euros", tenemos la función a optimizar es B(x,y) = F(x,y) = 600x + 500y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 600x + 500y.
Restricciones: $20x + 10y \le 900$; $20x + 20y \le 1400$; $30x + 60y \ge 1800$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $2x + y \le 90$; $x + y \le 70$; $x + 2y \ge 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $2x + y = 90$; $x + y = 70$; $x + 2y = 60$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos $y = -2x + 90$; $y = -x + 70$; $y = -x/2 + 30$; $x = 0$; $y = 0$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades originales, y determinamos el polígono convexo cerrado; con el cual calcularemos los vértices A, B, C y D de los cortes de las rectas que delimitan el polígono convexo cerrado.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = -x/2 + 30$, tenemos el vértice A(0,30).
De $y = -x/2 + 30$ e $y = -2x + 90$, tenemos $-x/2 + 30 = -2x + 90 \rightarrow -x + 60 = -4x + 180 \rightarrow 3x = 120$, luego $x = 40$ e $y = 10$, y el vértice es B(40,10).
De $y = -2x + 90$ e $y = -x + 70$, tenemos $-2x+90 = -x+70 \rightarrow 20 = x$, luego $y = 50$, y el vértice es C(20,50).
De $x = 0$ e $y = -x + 70$, tenemos el vértice es D(0,70).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,30), B(40,10), C(20,50) y D(0,70).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 600x + 500y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,30), B(40,10), C(20,50) y D(0,70). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,30) = 600(0) + 50(30) = 15000$; $F_B(40,10) = 600(40) + 50(10) = 29000$;
F_C(20,50) = $600(20) + 50(50)$ **= 37000**; $F_D(0,70) = 600(0) + 50(70) = 35000$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 37000** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(20,50), por tanto el máximo beneficio es de 37000 €, y se obtiene fabricando 20 collares del tipo A y 50 collares del tipo B.**

Preguntan si es posible fabricar 40 collares del tipo A (x) y 20 del tipo B (y). La respuesta es afirmativa si verifica todas las restricciones:

$2x + y \le 90 \rightarrow 2(40) + (20) \le 90 \rightarrow 100 \le 90$ **FALSO**
$x + y \le 70 \rightarrow (40) + (20) \le 70 \rightarrow 60 \le 70$ CIERTO
$x + 2y \ge 60 \rightarrow (40) + 2(20) \ge 70 \rightarrow 80 \ge 70$ CIERTO
$x \ge 0 \rightarrow 40 \ge 0$ CIERTO
$y \ge 0 \rightarrow 20 \ge 0$ CIERTO

No es posible fabricar 40 collares del tipo A y 20 collares del tipo B, pues no verifica la primera restricción.

17_mod6_EJERCICIO 2 (A)
Los costes de producción de una empresa, en miles de euros, dependen de la cantidad de producto fabricada x, medida en toneladas, según la función $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$. La capacidad máxima de producción es de 2 toneladas.
a) (1'25 puntos) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de costes de la empresa.
b) (0'75 puntos) Determine la cantidad que la empresa debe producir para minimizar los costes. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
c) (0'5 puntos) ¿Con qué producción la empresa tiene unos costes de producción máximos?

Solución

Los costes de producción de una empresa, en miles de euros, dependen de la cantidad de producto fabricada x, medida en toneladas, según la función $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$. La capacidad máxima de producción es de 2 toneladas.
a)
Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de costes de la empresa.

Me piden la monotonía, es decir el estudio de la primera derivad f '(x)

Leyendo el problema trabajamos en el intervalo [0,2] para "x" pues la capacidad (x) máxima de producción son 2 toneladas y la mínima 0 toneladas.

$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$; $f'(x) = -9 + 12x - 3x^2$.

De f '(x) = 0 $\rightarrow$ $-9 + 12x - 3x^2 = 0 = x^2 - 4x + 3 = 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$, por tanto las soluciones son x = 1 y x = 3 (está fuera del dominio [0,2]), que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(0) = $-9 + 12(0) - 3(0)^2 = -9 < 0$, luego f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,1)$, en nuestro caso en (0,1).

Como f '(2) = $-9 + 12(2) - 3(2)^2 = 3 > 0$, luego f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (1,3), en nuestro caso en (1,2).

Como f '(4) = $-9 + 12(4) - 3(4)^2 = -9 < 0$, luego f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(3,+\infty)$, que **está fuera de nuestro dominio [0,2].**

Por definición x = 1 es un mínimo relativo, que vale $f(1) = 30 - 9(1) + 6(1)^2 - (1)^3 = 26$.
Por definición x = 3 es un máximo relativo, que vale $f(3) = 30 - 9(3) + 6(3)^2 - (3)^3 = 30$, **está fuera de nuestro dominio [0,2].**
(b) y (c)
Determine la cantidad que la empresa debe producir para minimizar los costes. ¿Cuál sería dicho coste mínimo? ¿Con qué producción la empresa tiene unos costes de producción máximos?

Nos están pidiendo los extremos absolutos de la función f en el intervalo [0,2].

Sabemos que los extremos absolutos están entre loas extyremos del intervalo, en nuestro caso x = 0 y x = 2, las soluciones de f '(x) = 0, en nuestro caso x = 1, y los puntos donde f no es continua o derivable, ninguno en nuestro caso.

Sustituimos x= 0, x = 1 y x = 2 en f, el mayor valor será el maximo absoluto y el menor valor el mínimo absoluto.

f(0) = $30 - 9(0) + 6(0)^2 - (0)^3$ **= 30**
f(1) = $30 - 9(1) + 6(1)^2 - (1)^3$ **= 26**
$f(2) = 30 - 9(2) + 6(2)^2 - (2)^3 = 28$

El mínimo absoluto es de 26 en x = 1, es decir el coste mínimo es de 26000 € fabricando 1 tonelada de producto.

El máximo absoluto es de 30 en x = 0, es decir el coste máximo es de 30000 € fabricando 0 toneladas de producto (o fabricando 3 toneladas, que no está en el dominio [0,2])**.**

17_mod6_EJERCICIO 3 (A)
En un polideportivo municipal hay inscritos 520 usuarios de los que 220 son niños, 208 son adultos menores de 60 años y el resto adultos mayores de 60 años. De los inscritos, 1/5 de los niños, el 75% de los adultos menores de 60 años y 23 adultos mayores de 60 años utilizan las duchas normalmente. Se elige un usuario al azar.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que se duche en las instalaciones del polideportivo.
b) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea adulto menor de 60 años y utilice las duchas.
c) (0'75 puntos) Sabiendo que utiliza las duchas, halle la probabilidad de que sea un niño.

Solución

Este problema se puede realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Niños = N	Menores de 60 = -60	Mayores de 60 = +60	Total
Ducha = D	1/5 de 220 = 44	75% de 208 = 156	23	
D^C				
Total	220	208		520

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Niños = N	Menores de 60 = -60	Mayores de 60 = +60	Total
Ducha = D	1/5 de 220 = 44	75% de 208 = 156	23	**223**
D^C	**176**	**52**	**69**	**297**
Total	220	208	**92**	520

a)
Calcule la probabilidad de que se duche en las instalaciones del polideportivo.

Me piden **p(D) =** $\dfrac{\text{Total personas que se duchan}}{\text{Total personas inscritas}}$ = **220/520 = 11/26 ≅ 0'423077**.

b)
Calcule la probabilidad de que sea adulto menor de 60 años y utilice las duchas.

Me piden **p(-60∩D) =** $\dfrac{\text{Total personas menores de 60 y que se duchen}}{\text{Total personas inscritas}}$ **= 52/520 = 1/10 = 0'1**.

c)
Sabiendo que utiliza las duchas, halle la probabilidad de que sea un niño.

Me piden **p(N/D)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

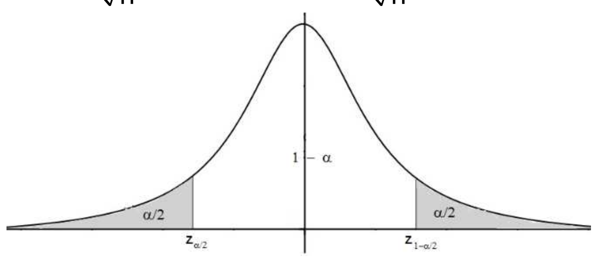
$$\mathbf{p(N/R)} = \frac{p(N\cap D)}{p(D)} = \frac{44/520}{223/520} = \mathbf{44/223 \cong 0'19731}.$$

17_mod6_EJERCICIO 4 (A)
El gasto que tienen los jóvenes durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 6 euros.
a) (1'5 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media μ es (24'47, 26'43). Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) (1 punto) Escogida otra muestra de tamaño 49 para estimar μ , calcule el error máximo cometido para esa estimación con un nivel de confianza del 97%.

Solución

El gasto que tienen los jóvenes durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 6 euros.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{x}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{x} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{x} \to N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a, b) donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

Del I.C. (μ) = (a, b) vemos que a + b = 2·$\overline{x}$, luego $\overline{x}$ = (a + b)/2.

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media μ es (24'47, 26'43). Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

Datos del problema: $\sigma = 6$, I.C. (μ) = (a, b) = (24'47, 26'43), de donde **la media es $\overline{x}$ = (a + b)/2 =**
= (24'47 + 26'43)/2 **= 25'45.**
Nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De $\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = a, tenemos $25'45 - 1'96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{n}}$ = 24'47, luego **el tamaño de la muestra es n =**

$= \left(\dfrac{1'96 \cdot 6}{25'45 - 24'47} \right)^2$ **= 144 jóvenes**.

b)
Escogida otra muestra de tamaño 49 para estimar μ , calcule el error máximo cometido para esa estimación con un nivel de confianza del 97%.

Datos del problema: n = 49, $\sigma = 6$, nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual $\alpha/2$ = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

Sabemos que **el error es E ≤** $z_{1-\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'17 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{49}}$ **= 1'86, es decir el error es menor de 2 jóvenes**.

OPCION B

17_mod6_EJERCICIO 1 (B)

a) (1'25 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales: $2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; $3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) (1'25 puntos) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot C - D^2 = I_2$.

Solución

a)
Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales: $2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; $3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

De $3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, tenemos $3A - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = B$. Sustituyendo en la otra ecuación resulta:

$2A - 5 \cdot (3A - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow 2A - 15A + \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 13A$, de donde $13A = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ y $\mathbf{B} = 3A - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$.

b)
Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot C - D^2 = I_2$.

De $X \cdot C - D^2 = I_2$, tenemos $X \cdot C = D^2 + I_2$.

Como det(A) = $|C| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 3 + 2 = 5 ≠ 0, existe la matriz inversa $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|} \cdot Adj(C^t)$.
Multiplicando la expresión $X \cdot C = D^2 + I_2$, por la derecha por C^{-1} tenemos $X \cdot C \cdot C^{-1} = (D^2 + I_2) \cdot C^{-1}$, de donde $X \cdot I_2 = (D^2 + I_2) \cdot C^{-1}$, es decir $\mathbf{X = (D^2 + I_2) \cdot C^{-1}}$.

$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$; $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, luego $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$D^2 + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Luego **X = = (D² + I₂)·C⁻¹ =** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 6/5 \\ -6/5 & 8/5 \end{pmatrix}$..

17_mod6_EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ x^2 - bx & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

a) (1'6 puntos) Calcule a y b para que la función sea continua y derivable en x = -1 y x = 0.
b) (0'9 puntos) Para a = 2 y b = -1/2 estudie su monotonía.

Solución

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ x^2 - bx & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

a)
Calcule a y b para que la función sea continua y derivable en x = -1 y x = 0.

Como es continua en x = -1 tenemos $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.

$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax + 1) = -a + 1$.
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} [x/(x + 2)] = -1/1 = -1$.

Igualando tenemos $-a + 1 = -1$, de donde **a = 2**.

Como es continua en x = 0 tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [x/(x + 2)] = 0/2 = 0$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 – bx) = 0 - 0 = 0$.

Igualando tenemos 0 = 0, cierto.

Tenemos $f(x)=\begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ x^2 - bx & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{x+2-x}{(x+2)^2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ 2x - b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{2}{(x+2)^2} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ 2x - b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

La función f(x) es derivable en x = -1 si f '(-1-) = f '(-1+). Estudiamos la continuidad de la derivada.

$f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} (2) = 2$.
$f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} [2/(x + 2)^2] = 2/(-1)^2 = 2$.

Igualando tenemos 2 = 2, cierto.

La función f(x) es derivable en x = 0 si f '(0-) = f '(0+). Estudiamos la continuidad de la derivada.

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} [2/(x + 2)^2] = 2/(2)^2 = 1/2$.
$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - b) = -b$.

Igualando tenemos $1/2 = -b$, de donde **b = - 1/2**.

b)
Para a = 2 y b = -1/2 estudie su monotonía.

Tenemos $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si } -1 < x \le 0 \\ x^2+\dfrac{x}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{2}{(x+2)^2} & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 2x+\dfrac{1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Nos piden el estudio de f '(x).

Si $x \le -1$, f '(x) = 2 > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty, -1)$

Si $-1 < x \le 0$, f '(x) = $2/(x + 2)^2$. De f '(x) = 0 tenemos 2 = 0, lo cual es absurdo, y como f '(-0'5) = $2/(1'5)^2 > 0$, resulta que f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (1, 0)

Si x > 0 , f '(x) = 2x + 1/2. De f '(x) = 0 tenemos 2x + 1/2 = 0, de donde x = -1/4, que no está en el dominio x>0, por tanto como f '(1) = 2(1) + 1/2 = 5/2 > 0, resulta que f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(0, +\infty)$.

Luego f(x) es estrictamente creciente en R.

17_mod6_EJERCICIO 3 (B)

Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras, A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40% proviene de la productora A, de las cuales el 60% es de la variedad picual. De las que provienen de la productora B, el 30% es de la variedad arbequina. Se elige una caja de aceitunas al azar.
a) (1punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?
b) (1 punto) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?
c) (0'5 puntos) Calcule la probabilidad de que sea de la productora A o de la variedad picual.

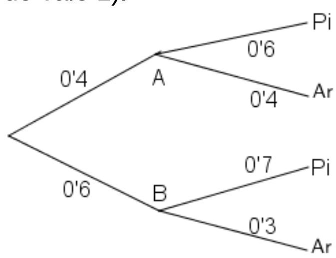
Solución

Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras, A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40% proviene de la productora A, de las cuales el 60% es de la variedad picual. De las que provienen de la productora B, el 30% es de la variedad arbequina. Se elige una caja de aceitunas al azar.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?

Llamemos A, B, Pi y Ar a los sucesos siguientes, "productora A", " productora B", "aceituna picual" y " aceituna arbequina ", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 40% = 0'4; p(Pi/A) = 60% = 0'6 ; p(Ar/B) = 30% = 0'3, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(aceituna variedad picual) = p(Pi).**

Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(aceituna picual) = p(Pi) = p(A).p(Pi/A) + p(B).p(Pi/B) = (0'4)·(0'6) + (0'6)·(0'7) **= 33/50 = 0'66**.
b)
Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?

Me piden **p(venga de la productora A sabiendo que es picual) = p(A/Pi).**

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(A/Pi) = $\dfrac{p(A \cap Pi)}{p(Pi)} = \dfrac{p(A)\cdot p(Pi/A)}{p(Pi)} = \dfrac{(0'4)\cdot(0'6)}{0'66}$ **= 4/11 = 0'363636**.
c)
Calcule la probabilidad de que sea de la productora A o de la variedad picual.

Me piden **p(productora A o variedad picual) = p(A o Pi) = p(A$\cup$Pi) =** p(A) + p(Pi) - p(A$\cap$Pi) =
= p(A) + p(Pi) - p(A)·p(Pi/A) = 0'4 + 0'66 - (0'4)·(0'6) **= 0'82.**

17_mod6_EJERCICIO 4 (B)

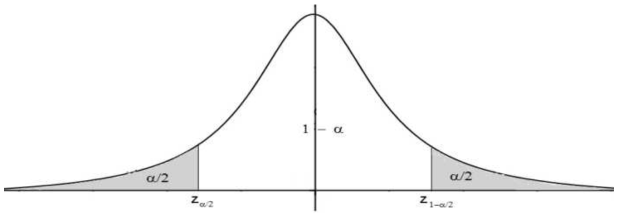
La Delegación de Tráfico de una ciudad desea estudiar la influencia del uso del teléfono móvil en los accidentes de tráfico. Elegida una muestra aleatoria simple de 250 accidentes registrados el año pasado, se observó que 90 de ellos se produjeron por distracciones debidas al uso del móvil.

a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de accidentes de tráfico debidos al uso del móvil mientras se conduce.

b) (1 punto) Usando la estimación anterior, calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para estimar la proporción de accidentes con un error máximo del 5% y un nivel de confianza del 99%.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =
$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$
= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$
$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

La Delegación de Tráfico de una ciudad desea estudiar la influencia del uso del teléfono móvil en los accidentes de tráfico. Elegida una muestra aleatoria simple de 250 accidentes registrados el año pasado, se observó que 90 de ellos se produjeron por distracciones debidas al uso del móvil.

a)

Determine un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de accidentes de tráfico debidos al uso del móvil mientras se conduce.

Datos del problema: n = 250, $\hat{p} = \frac{90}{250}$ = 0'36, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ = 1 - 0'36 = 0'64, nivel de confianza = 97% = 0'97 =
= 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual α/2 = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto el intervalo de confianza pedido es::

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'36 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot 0'64}{250}}, 0'36 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot 0'64}{250}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'24123; 0'42587)**

b)

Usando la estimación anterior, calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para estimar la proporción de accidentes con un error máximo del 5% y un nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: E $\le$ 5% = 0'05; $\hat{p}$ = 0'36, $\hat{q}$ = 0'64 nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde

α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575, por tanto:

De $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{(2'575)^2 \cdot 0'36 \cdot 0'64}{(0'05)^2}$ = 611'0784, es decir **el tamaño mínimo de accidentes a seleccionar es de n = 612**.