SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS MODELO 6 DEL 2015

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$.

b) (1 punto) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a y b para que se verifique la ecuación $M\cdot A = A$.

Solución

a)

Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$.

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y sabemos que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La ecuación dada es $A\cdot X + B = I_2$.

Como $\det(A) = |A| = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, existe $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

De $A\cdot X + B = I_2$, tenemos $A\cdot X = I_2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C$, es decir $A\cdot X = C$.

Multiplicando la expresión $A\cdot X = C$ por A^{-1} por la izquierda tenemos:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot C \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot C}$.

Calculamos la matriz inversa A^{-1}.

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, luego $\mathbf{A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/3)\cdot} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss

A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) F_2\text{-}2F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) F_2\text{:}(-3) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right) F_1\text{-}2F_2 \approx$

$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$ por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

La matriz pedida es: $\mathbf{X = A^{-1}\cdot C = (1/3)\cdot} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{= (1/3)\cdot} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b)

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a y b para que se verifique la ecuación $M\cdot A = A$.

De $M\cdot A = A$, tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos: **a = 2 y b = 1**.

EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 5}{x + 4} & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función *f* corta al eje de ordenadas.

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en $x = -3$.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 5}{x + 4} & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a)
Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función *f* corta al eje de ordenadas.

Si $x \ge 2$, $f(x) = x^3 - 3x^2$, que es un trozo de función polinómica, y sabemos **que las funciones polinómicas no tienen asíntotas.**

Si $x < 2$, $f(x) = \frac{2x-5}{x+4}$, que es un trozo de hipérbola, y sabemos **que las hipérbolas tienen asíntota vertical (A.V.) y asíntota horizontal (A.H.), en este caso en - ∞.**

Como $\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} \frac{2x-5}{x+4} = \frac{-13}{0^+} = -\infty$, **la recta x = -4 es A.V. de f(x)**. $\lim_{x\to -4^+} f(x) = \frac{-13}{0^-} = +\infty$

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-5}{x+4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1} = 2$, **la recta y = 2 es una A.H. de f en - ∞.**

Como $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - \text{A.H.}) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x-5}{x+4} - 2\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-13}{x+4} = \frac{-13}{-\infty} = 0^+$, la gráfica de f(x) está por encima de la A.H. y = 2 en - ∞.

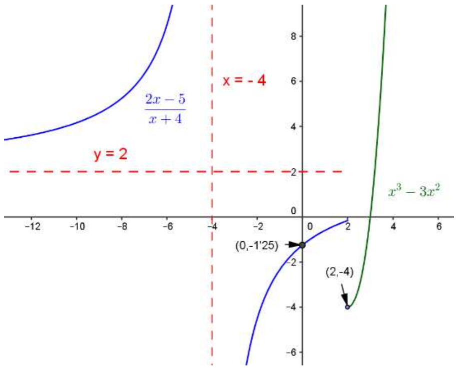
La gráfica de f(x) corta al eje de ordenadas para x = 0, que está en la rama x < 2 y $f(x) = \frac{2x-5}{x+4}$.

Para x = 0, $f(0) = \frac{-5}{4} = -1'25$. **El punto de corte de f(x) con ordenadas es (0,-1’25).**

Sabemos que la gráfica de una hipérbola está enfrentada respecto a sus asíntotas, como conocemos el punto (0,-1’25) que está a la derecha de su A.V. x = -4, podemos hacer un esbozo de la gráfica de f y sus asíntotas para x < 2.

Para $x \ge 2$ tenemos una cúbica, y vemos que corta a abscisas en x = 0(doble) no está en su dominio y en x = 3 (soluciones de $x^3 - 3x^2 = 0$), y en +∞ vale +∞. Además $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 = -4$.

Un esbozo de las asíntotas y la gráfica es:



b)
Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = -3.

Vemos que x = - 3 está en la rama x < 2, donde $f(x) = \frac{2x-5}{x+4}$.

La recta tangente en x = - 3 es y - f(-3) = f ’(-3)·(x + 3)

$f(x) = \frac{2x-5}{x+4} \to f(-3) = \frac{2(-3)-5}{(-3)+4} = -11.$

$f'(x) = \frac{2\cdot(x+4) - (2x-5)\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{13}{(x+4)^2} \to f'(-3) = \frac{13}{(-3+4)^2} = 13.$

La recta tangente en x = -3 es **y - (-11) = 13·(x + 3)**, de donde **y = 13x + 28.**

EJERCICIO 3 (A)

Un estudio estadístico determina que la noche del 31 de diciembre conduce el 5% de la población, el 20% consume alcohol esa noche y el 2% conduce y consume alcohol.

a) (0’5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “conducir” y “consumir alcohol”?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de la población no conduce ni consume alcohol esa noche?

c) (1 punto) De las personas que consumen alcohol, ¿qué porcentaje conduce esa noche?

Solución

Un estudio estadístico determina que la noche del 31 de diciembre conduce el 5% de la población, el 20% consume alcohol esa noche y el 2% conduce y consume alcohol.
a)
¿Son independientes los sucesos "conducir" y "consumir alcohol"?

Llamamos A y B a los sucesos "conducir la noche del 31 de diciembre" y "consumir alcohol la noche del 31 de diciembre".

Del problema tenemos: p(A) = 5% = 0'05, p(B) = 20% = 0'2 y p(A∩B) = 2% = 0'02.

Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); p(A/B) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; p(B) = 1 - p(B^C);

p(A^C∩B^C) = {Ley de Morgan} = p(A∪B)^C = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B); p(A∩B^C) = p(A) - p(A∩B).

A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B).

Como **p(A∩B) = 0'02 ≠ p(A)·p(B)** = 0'05·0'2 = 0'01, **los sucesos A y B no son independientes, es decir dependen conducir y consumir alcohol la noche del 31 de diciembre.**
b)
¿Qué porcentaje de la población no conduce ni consume alcohol esa noche?

Me piden **p(no conduce ni consume alcohol) = p(noA y noB) = p(A^C∩B^C) =** {Ley de Morgan} =

= p(A∪B)^C = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B) = 1 - 0'23 **= 0'77 = 77%.**

p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) = 0'05 + 0'2 – 0'02 = 0'23
c)
De las personas que consumen alcohol, ¿qué porcentaje conduce esa noche?

Me piden **p(conduce, sabiendo consume alcohol) = p(A/B)**

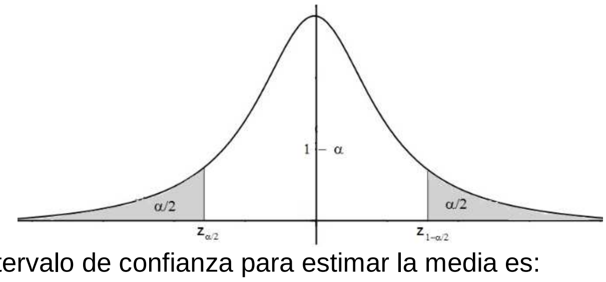
Luego **p(A/B)** = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ = (0'02)/(0'2) **= 0'10 = 10%**.

EJERCICIO 4 (A)

El capital de las hipotecas constituidas sobre fincas urbanas en Andalucía es una variable aleatoria Normal con desviación típica 10000 €.
a) (2 puntos) Se toma una muestra aleatoria de 9 hipotecas con los siguientes capitales (en euros):
95000 99000 105000 106000 108000 111000 112000 115000 120000.
Construya un intervalo de confianza, al 95%, para el capital medio de dichas hipotecas.
b) (0'5 puntos) ¿Qué número mínimo de hipotecas deberíamos considerar en una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo en la estimación del capital medio sea de 4000€?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ son *los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la* *media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

El capital de las hipotecas constituidas sobre fincas urbanas en Andalucía es una variable aleatoria Normal con desviación típica 10000 €.

a)

Se toma una muestra aleatoria de 9 hipotecas con los siguientes capitales (en euros):

95000 99000 105000 106000 108000 111000 112000 115000 120000.

Construya un intervalo de confianza, al 95%, para el capital medio de dichas hipotecas.

Datos del problema: σ = 10000; n = 9; $\overline{x}$ =
= (95000+99000+105000+106000+108000+111000+112000+115000+120000)/9 $\cong$ (971000)/9; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{971000}{9}-1'96\cdot\frac{10000}{\sqrt{9}},\frac{971000}{9}+1'96\cdot\frac{10000}{\sqrt{9}}\right)$ **=**

$\cong$ **(101355'5556,114422'2222)**

b)

¿Qué número mínimo de hipotecas deberíamos considerar en una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo en la estimación del capital medio sea de 4000€?

Datos del problema: Error = E ≤ 4000, σ = 10000, igual nivel de confianza = 95% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 4000, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'96\cdot 10000}{4000}\right)^2$ = 24'01, es decir **el tamaño mínimo es de n = 25 es decir, el tamaño mínimo de hipotecas a considerar es de 25.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

(2'5 puntos) Se desea invertir 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2'5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?

Solución

Se desea invertir 100000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2'5% respectivamente. Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A. ¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = Inversión del producto financiero A.
Sea y = Inversión del producto financiero B.

De "el producto B exige una inversión mínima de 10000" $\rightarrow$ y ≥ 10000.
De "no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A" $\rightarrow$ y ≤ 3x.
De "Se desea invertir 100000 € en dos productos financieros A y B" $\rightarrow$ x + y ≤ 100000.
De "Se invierte en algún productos financieros A y B" $\rightarrow$ x ≥ 0, y ≥ 0.
De "A rentabilidad del 2% y B rentabilidad del 2'5%", tenemos la función a optimizar es B(x,y) = F(x,y) =
= 2%x + 2'5%y = 0'02x + 0'025y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 0'02x + 0'025y.
Restricciones: y ≥ 10000; y ≤ 3x; x + y ≤ 100000; x ≥ 0; y ≥ 0

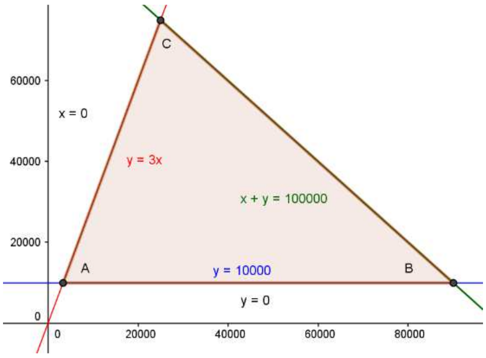
Las desigualdades $y \geq 10000$; $y \leq 3x$; $x + y \leq 100000$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $y = 10000$; $y = 3x$; $x + y = 100000$; $x = 0$; $y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 10000; \quad y = 3x; \quad y = -x + 100000; \quad x = 0; \quad y = 0$$

La región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A, B y C.

Gráficamente la región factible es:



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 10000$ e $y = 3x$, tenemos $3x = 10000$, luego $x = 10000/3$, y el vértice es A(10000/3,10000).
De $y = 10000$ e $y = -x+100000$, tenemos $10000 = - x+100000 \rightarrow x = 90000$, y el vértice es B(90000,10000).
De $y = -x+100000$ e $y = 3x$, tenemos $-x+100000 = 3x \rightarrow 100000 = 4x \rightarrow 25000 = x$, con lo cual $y = -(25000)+100000 = 75000$, y el vértice es C(25000,75000).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(10000/3,10000), B(90000,10000) y C(25000,75000).

Veamos la solución máxima de la función F(x,y) = 0'02x + 0'025y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(10000/3,10000), B(90000,10000) y C(25000,75000). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(10000/3,10000) = 0'02(10000/3) + 0'025(10000) = 950/3 ≅ 316'66667;
F(90000,10000) = 0'02(90000) + 0'025(10000) = 850;
F(25000,75000) = 0'02(25000) + 0'025(75000) = **2375**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 6125/3** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(25000,750000), por tanto <u>el máximo beneficio es de 2375 €, y se obtiene invirtiendo 25000 € en el producto A y 75000 € en el producto B</u>.**

EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función f, definida a trozos por la expresión $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 6 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (0'5 puntos) Estudie la continuidad de la función.
b) (0'5 puntos) Analice la derivabilidad de la función.
c) (1'5 puntos) Represéntela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.

Solución

Se considera la función f, definida a trozos por la expresión $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 6 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) y b)
Estudie la continuidad de la función. Analice la derivabilidad de la función.
$f(x) = -x^2 + x + 6$ es continua y derivable en R, en particular en $x < 2$.
$f(x) = x + 2$ es continua y derivable en R, en particular en $x > 2$.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en $x = 2$.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x^2 + x + 6) = -(2)^2 + (2) + 6 = 4$,

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 2) = (2) + 2 = 4$. **Como ambos valores son iguales f es continua en x = 2, luego f es continua en R.**

f(x) es derivable en x = 2 si existe f '(2), es decir $f'(2^-) = f'(2^+)$. Usaremos la continuidad de la derivada.

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 6 & \text{si } x \le 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (-2x+1) = -3$

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (1) = 1$. Como **$f'(2^-)=-3 \neq f'(2^+)=1$, no existe f '(2) luego f es derivable en R – {2}.**

c)
Represéntela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.

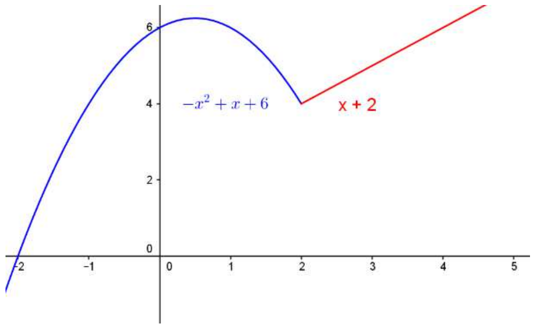
En x < 2, la gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 6$ es la de un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo (∩) porque el número que multiplica a x^2 es negativo; abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 0 = -2x + 1, de donde x = 1/2 y el vértice es V(1/2,f(1/2)) = V(1/2,25/4) = V(0'5,6'25), que es un máximo relativo, por tanto f(x) es estrictamente creciente (↗) en (-∞,1/2) y estrictamente decreciente (↘) en (1/2,2).

Sus cortes con los ejes son:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,6)

Para $f(x) = 0 = -x^2 + x + 6 = x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, de *donde x = 3 que no está en x < 2*, y x = -2, punto (-2,0).

En x > 2, la gráfica de f(x) = x + 2 es la una semirrecta, que pasa por $(2^+,4)$ y (3,5). Como su pendiente es positiva, f(x) es estrictamente creciente (↗) en (2,+∞).

Por definición x = 2 es un mínimo relativo, no derivable, que vale f(2) = 4.
Un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3 (B)

Una enfermedad puede estar provocada por solo una de estas tres causas: A, B o C. La probabilidad de que la causa sea A es 0'3, la de que sea B es 0'2 y la de que sea C es 0'5. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo con la citada enfermedad no necesite hospitalización?

b) (1 punto) Si un enfermo está hospitalizado debido a esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la causa haya sido A?

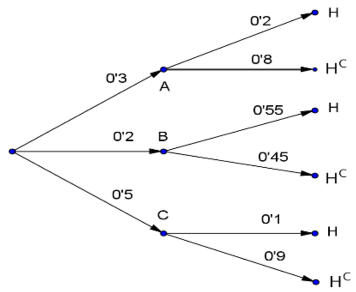
Solución

Una enfermedad puede estar provocada por solo una de estas tres causas: A, B o C. La probabilidad de que la causa sea A es 0'3, la de que sea B es 0'2 y la de que sea C es 0'5. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.

Llamemos A, B, C, H y H^C, a los sucesos siguientes, "causa A", "causa B", "causa C", "hospitalización" y "no hospitalización ", respectivamente.
Datos del problema p(A) = 0'3; p(B) = 0'2; p(C) = 0'5; p(H/A) = 20% = 0'20; p(H/B) = 55% = 0'55;

p(H/C) = 10% = 0’10;….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo con la citada enfermedad no necesite hospitalización?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que no necesite hospitalización es:

p(no hospitalización) = p(H^C) = p(A).p(H^C/A) + p(B).p(H^C/B) + p(C).p(H^C/C) =
= 0’3·0’8 + 0’2·0’45 + 0’5·0’9 **= 39/50 = 0’78**.

b)
Si un enfermo está hospitalizado debido a esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que la causa haya sido A?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(A/H) =} \frac{p(A\cap H)}{p(H)} = \frac{p(A).p(H/A)}{1 - p(H^C)} = \frac{0'3\cdot 0'2}{1 - 0'78} \textbf{ = 3/11} \cong \textbf{0'27273}.$$

EJERCICIO 4 (B)

(2’5 puntos) El peso medio de los pájaros de una determinada especie que habita en un parque natural se consideraba no inferior a 110 g, pero los biólogos del parque sostienen ahora la hipótesis de que dicho peso medio ha disminuido a consecuencia del cambio climático. Se ha tomado una muestra de 100 pájaros de esta especie y se ha obtenido un peso medio de 108 g. Se sabe que la variable que mide el peso de los pájaros de esta especie sigue una distribución Normal con desviación típica igual a 6 g.
Plantee un contraste de hipótesis ($H_0 : \mu \geq 110$), con un nivel de significación del 5%, determine la región crítica de este contraste y, utilizando ésta, razone si con ese nivel se puede aceptar que los biólogos del parque están en lo cierto.

Solución

El peso medio de los pájaros de una determinada especie que habita en un parque natural se consideraba no inferior a 110 g, pero los biólogos del parque sostienen ahora la hipótesis de que dicho peso medio ha disminuido a consecuencia del cambio climático. Se ha tomado una muestra de 100 pájaros de esta especie y se ha obtenido un peso medio de 108 g. Se sabe que la variable que mide el peso de los pájaros de esta especie sigue una distribución Normal con desviación típica igual a 6 g.
Plantee un contraste de hipótesis ($H_0 : \mu \geq 110$), con un nivel de significación del 5%, determine la región crítica de este contraste y, utilizando ésta, razone si con ese nivel se puede aceptar que los biólogos del parque están en lo cierto.

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos del problema: μ = 110; n = 100; $\overline{x}$ = 108; σ = 6; los biólogos sostienen la hipótesis de que el peso medio ha disminuido ($H_0 : \mu \geq 110$), nivel de significación = α = 5% = 0’05. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).
También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

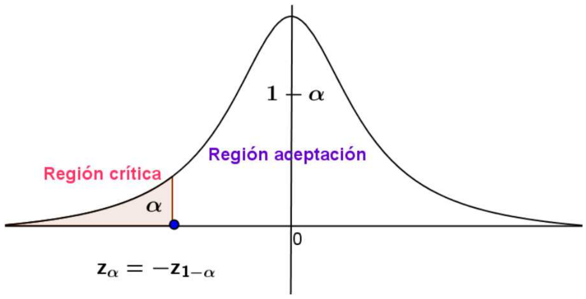
Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu \geq 110$ y $H_1 : \mu < 110$, la cual *nos indica la dirección del contraste, es decir la región crítica está a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto crítico que nos dará la región crítica y de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'05, tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0'95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos $z_{1-\alpha}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645, en nuestro caso **$-z_{1-\alpha}$ = -1'645** que separa la zona de aceptación y la de rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{108 - 110}{6/\sqrt{100}} \cong -3'3333$

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 \cong$ - 3'33 es menor que el **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = = -1'645, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \ge 110$ y aceptar la hipótesis alternativa H_1: $\mu < 110$ con un nivel de significación del 5%**

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, se acepta la hipótesis de los biólogos del parque de que el peso medio de los pájaros ha disminuido a consecuencia del cambio climático.