OPCIÓN A

16_mod4_EJERCICIO 1 (A)

a) (0'5 puntos) Si A es una matriz de dimensión mxn, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $(A^t \cdot A)\cdot X = I_n$.

b) (1'25 puntos) Calcule dicha matriz X en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) (0'75 puntos) Calcule, si es posible, el producto $A\cdot(A^t\cdot A)$.

Solución

a)

Si A es una matriz de dimensión mxn, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $(A^t \cdot A)\cdot X = I_n$.

Para poder multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª tiene que coincidir con el número de filas de la 2ª; y para poder sumar matrices deben de tener el mismo orden.

$(A^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{3}x\underline{2}})\cdot X_{\underline{2}x2} = I_{2x2}$.

$(A^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{3}x\underline{2}})$ es de orden 2x2, como I es cuadrada, X es cuadrada y el número de filas es 2 para poder multiplicar por la derecha por la matriz $(A^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{3}x\underline{2}})$, por tanto X es cuadrada de orden 2x2 y la identidad I también es de orden 2x2.

b)

Calcule dicha matriz X en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(A^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{3}x\underline{2}}) = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

La expresión $A^t\cdot A\cdot X = I$, es $C\cdot X = I$. Como $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0$, existe matriz inversa

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$. Multiplicando la expresión $C\cdot X = I$ por la izquierda por C^{-1} tenemos:

$C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot I \rightarrow I\cdot X = C^{-1} \rightarrow$ **$X = C^{-1}$ luego X coincide con C^{-1}**.

$\det(C) = 8$, $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, luego:

$X = C^{-1}$ $= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$.

c)

Calcule, si es posible, el producto $A\cdot(A^t\cdot A)$.

Para poder multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª tiene que coincidir con el número de filas de la 2ª, y el producto tiene filas de la primera matriz y columnas de la segunda matriz; y para poder sumar matrices deben de tener el mismo orden.

$A_{\mathbf{3}x2}\cdot(A^t_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{3}x2}) = A_{3x\mathbf{2}}\cdot C_{\mathbf{2}x2} = D_{3x2}$, efectivamente se puede multiplicar y nos sale la matriz D de orden 3x2, veámoslo:

$D = A\cdot C =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

16_mod4_EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2+1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$, con $a > 0$.

a) (1'3 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que la función sea continua en su dominio. En este caso, ¿sería derivable en su dominio?

b) (1'2 puntos) Para el valor a = 4, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = −1.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x + a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, con a > 0.

a)
Calcule el valor del parámetro *a* para que la función sea continua en su dominio. En este caso, ¿sería derivable en su dominio?

Estudiamos la continuidad en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{a}x^2+1\right) = \frac{(2)^2}{a}+1 = \frac{4}{a}+1.$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (-x + a) = -2 + a$, como tienen que ser iguales tenemos $\frac{4}{a}+1 = -2 + a$, de donde

4+a = -2a+a^2, es decir **0 = -4 - 3a + a^2**. Resolviendo la ecuación $a = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, es decir las soluciones **a** = (3+5)/2 **= 4** y **a** = (3-5)/2 **= -1.** Como dicen que a > 0**, resulta que a = 4, para que f(x) sea continua.**

Veamos la derivabilidad para a = 4.

Si **a = 4**, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{4} & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$;

f(x) es derivable en x = 2 si $f'(2^-) = f'(2^+)$ (Vemos la continuidad de la derivada) *la hacemos con a = 5.*

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} (x/2) = 2/2 = 1$**.**

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} (-1) = -1$.

Como $f'(2^-) = 1 \ne f'(2^+) = -1$, **la función f(x) no es derivable en x = 2, para a = 4**.

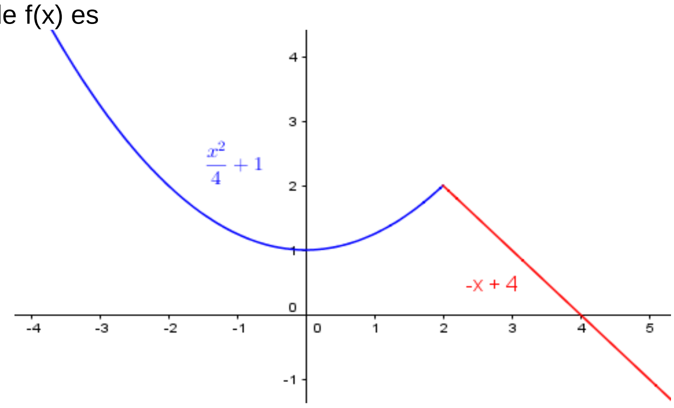
b)
Para el valor a = 4, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = −1.

Si **a = 4**, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$;

Si x ≤ 2, f(x) = x^2/4 + 1, cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba ∪ (el número que multiplica a x^2 es positivo), y abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 0 = x/2, de donde x = 0 y el vértice es el punto V(0,f(0)) = *V(0,1).* Le damos a "x" el valor 2, f(2) = $(2)^2$/4 + 1 = 4/4 + 1 = 2, punto *(2,2).* Para terminar de dibujarla le damos un valor a "x" a la izquierda del 0. Para x = -2, f(-2) = $(-2)^2$/4 + 1 =
= 4/4 + 1 = 2; punto *(-2,2).*

Si x > 2, f(x) = -x + 4, su gráfica es una semirrecta. Con dos puntos es suficiente; para x = 2^+, $f(2^+) = -(2^+) +4 = 2^-$, punto (2^+,2^-). Para x = 3, f(x) = -(3) + 4 = 1, punto (3,1).

Un esbozo de la gráfica de f(x) es



La ecuación de la recta tangente en x = -1 es "*y - f(-1) = f '(-1)·(x – (-1))*"
Si x = -1, estamos en la rama x ≤ 2, con lo cual f(x) = $x^2/4$ + 1 y f '(x) = x/2.
De f(x) = $x^2/4$ + 1, f(-1) = $(-1)^2/4$ + 1 = 1/4 + 1 = 5/4.
De f '(x) = x/2, f '(-1) = -1/2, por tanto la ecuación de **la recta tangente pedida es "y - 5/4 = (-1/2)·(x + 1)".**

16_mod4_EJERCICIO 3 (A)
Disponemos de tres monedas: 1 dólar, 1 libra y 1 euro.
La moneda de 1 dólar está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de 1 libra también está trucada y tiene dos caras y la de 1 euro es correcta. Se escoge una de las tres monedas al azar y se lanza.
a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?
b) (1 punto) Sabiendo que salió cruz, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada fuera la de 1 dólar?

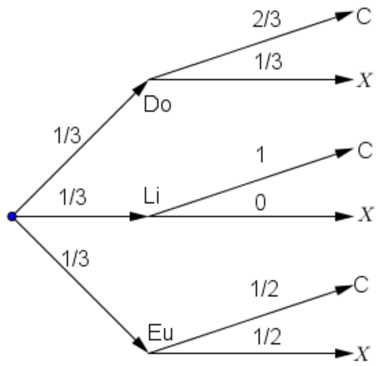
Solución

Disponemos de tres monedas: 1 dólar, 1 libra y 1 euro.
La moneda de 1 dólar está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de 1 libra también está trucada y tiene dos caras y la de 1 euro es correcta. Se escoge una de las tres monedas al azar y se lanza.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

Llamemos Do, Li, Eu, C y X, a los sucesos siguientes, "moneda de 1 dólar", "moneda de 1 libra", "moneda de 1 euro", "salir cara" y "salir cruz", respectivamente.

Datos del problema p(Do) = 1/3; p(Li) = 1/3; p(Eu) = 1/3; p(C/Do) = 2/3 ; p(C/Li) = 1, p(C/Eu) = 1/2 ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(cara) = p(C) = p(Do).p(C/Do) + p(Li).p(C/Li) + p(Eu).p(C/Eu) =
= (1/3)·(2/3) + (1/3)·(1) + (1/3)·(1/2) **= 13/18 ≅ 0'72222**.
b)
Sabiendo que salió cruz, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada fuera la de 1 dólar?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(Do/X) =} \frac{p(Do \cap X)}{p(X)} = \frac{p(Do)\cdot p(X/Do)}{1 - p(C)} = \frac{(1/3)\cdot(1/3)}{1 - (13/18)} \textbf{ = 2/5 = 0'4}.$$

16_mod4_EJERCICIO 4 (A)
Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes:

682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a) (2 puntos) Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

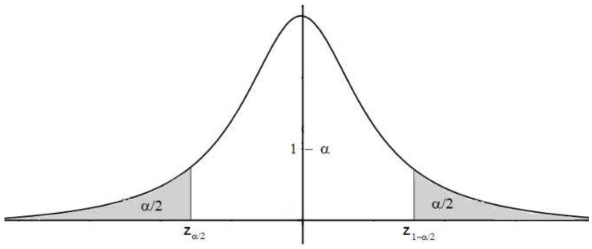
Solución

Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes:

682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a)
Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: n = 10; media muestral $\overline{x}$ = (682+553+555+666+657+649+522+568+700+552)/10 = = 610’4; σ = 50; nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde α = 0’05, con la cual α/2 = 0’05/2 = 0’025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene y corresponden a 1’96, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(610'4 - 1'96\cdot\frac{50}{\sqrt{10}}, 610'4 + 1'96\cdot\frac{50}{\sqrt{10}}\right) \cong$ **(579’41,641’39)**

b)
¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

Datos del problema: n = 10, σ = 50, nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96.

Luego el error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\frac{50}{\sqrt{10}} \cong$ 30’99, es decir **el error es menor de 31 personas.**

OPCION B

16_mod4_EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = (-2 3) y C = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado: A·B, B·A, B·C y $C^t\cdot B^t$.

b) (1’5 puntos) Calcule la matriz X en la ecuación $A\cdot X + B^t = 4C$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = (-2 3) y C = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a)
Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado: A·B, B·A, B·C y $C^t\cdot B^t$.

Para poder multiplicar matrices el número de columnas de la 1ª matriz tiene que coincidir con el número de filas de la 2ª matriz; y el resultado tiene filas de la 1ª y columnas de la 2ª.

$A_{2x\mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{1}x2}$, **no se puede multiplicar.**

$B_{1x\mathbf{2}}\cdot A_{\mathbf{2}x2}$, **si se puede multiplicar. B· A =** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot$

$B_{1x\mathbf{2}}\cdot C_{\mathbf{2}x1}$, **si se puede multiplicar. B· C =** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\cdot$

$C^t_{1x\mathbf{2}}, \cdot B^t_{\mathbf{2}x1}$, **si se puede multiplicar.** $\mathbf{C^t\cdot B^t =}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}\cdot$

b)

Calcule la matriz X en la ecuación $A\cdot X + B^t = 4C$.

De $A\cdot X + B^t = 4C$, tenemos $A\cdot X = 4C - B^t$. Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, por tanto podemos multiplicar la expresión $A\cdot X = 4C - B^t$ por la izquierda por la matriz inversa A^{-1} $\rightarrow$ $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(4C - B^t)$ $\rightarrow$ $I\cdot X = A^{-1}\cdot(4C - B^t)$ $\rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(4C - B^t)}$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, $|A| = 6$, $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$4C - B^t = 4\cdot 4\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(4C - B^t) =}$ $\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix}$.

16_mod4_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$,

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.

b) (1 punto) Estudie su monotonía y su curvatura para x > 0.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$,

a)

Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.

La función $\frac{4}{x}$ es continua y derivable en R – {0}, en particular en x < 2.

La función $x^2 - 2x + 2$ es continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (4/x) = 4/2 = 2$.

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 2) = (2)^2 - 2(2) + 2 = 2$.

Como $f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = 2$, **f(x) es continua en x = 2, por tanto f(x) es continua en R.**

f(x) es derivable en x = 2 si $f'(2^-) = f'(2^+)$ (Vemos la continuidad de la derivada).

$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$,

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} (-4/x^2) = -4/(2)^2 = -1$.

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} (2x - 2) = 2(2) - 2 = -2$.

Como $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 2$, **la función f(x) no es derivable en x = 2, luego f(x) es derivable en R - {2}**.

b)

Estudie su monotonía y su curvatura para x > 0.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x^2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x^3} & \text{si } 0<x<2 \\ 2 & \text{si } x>2 \end{cases}$,

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si 0 < x < 2, f '(x) = $- 4/x^2$.

De f '(x) = 0, tenemos $- 4/x^2 = 0$, luego - 4 = 0, lo cual es absurdo, por tanto no tiene extremos relativos y la función siempre es creciente $(\nearrow)$ o decreciente $(\searrow)$ en el intervalo (0,2).

Como f '(1) = $- 4/(1)^2 = - 4 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0,2).**

Si x > 2, f '(x) = 2x - 2.

De f '(x) = 0 tenemos 2x – 2 = 0, de donde **x = 1** (que **no está en el dominio x > 2**), por tanto en x > 2 la función siempre es creciente $(\nearrow)$ o decreciente $(\searrow)$.

Como f '(3) = 2(3) - 2 = 4 > 0, **f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (2,+∞).**

Por definición f(x) tiene un mínimo relativo en x = 2 (no derivable) que vale f(2) = 2.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f ''(x).

Si 0 < x < 2, f ''(x) = $8/x^3$.

De f ''(x) = 0, tenemos $8/x^3 = 0$, luego 8 = 0, lo cual es absurdo, por tanto no tiene puntos de inflexión, y la función siempre es convexa $\cup$ o cóncava $\cap$ en el intervalo (0,2).

Como f ''(1) = $8/(1)^3 = 8 > 0$, **f(x) es convexa $\cup$ en (0,2).**

Si x > 2, f ''(x) = 2.

De f ''(x) = 0 tenemos 2 = 0, lo cual es absurdo, por tanto no tiene puntos de inflexión, y la función siempre es convexa $\cup$ o cóncava $\cap$ en el intervalo (2, +∞)

Como f ''(3) = 2 > 0, **f(x) es convexa $\cup$ en (2,+∞).**

Por tanto f(x) es convexa en (0,2) y también en (2,+∞), luego f(x) es convexa en (0,+∞), y no tiene puntos de inflexión.

16_mod4_EJERCICIO 3 (B)

De los alumnos que se presentaron a las pruebas de selectividad de una provincia, 1150 se examinaron de Geografía; de estos, 598 eligieron la opción A. Se sabe que aprobaron esa asignatura el 78% de los que eligieron la opción A y el 74% de los que eligieron la opción B. Se ha escogido al azar uno de los alumnos que se examinaron de Geografía.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que este alumno haya aprobado esta asignatura?

b) (1 punto) Si se sabe que este alumno ha aprobado Geografía, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la opción A?

Solución

De los alumnos que se presentaron a las pruebas de selectividad de una provincia, 1150 se examinaron de Geografía; de estos, 598 eligieron la opción A. Se sabe que aprobaron esa asignatura el 78% de los que eligieron la opción A y el 74% de los que eligieron la opción B. Se ha escogido al azar uno de los alumnos que se examinaron de Geografía.

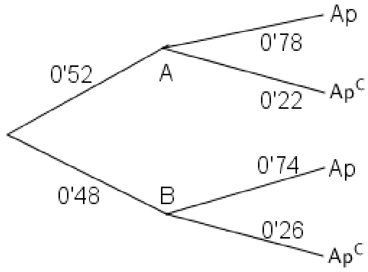
a)

¿Cuál es la probabilidad de que este alumno haya aprobado esta asignatura?

Llamemos A, B, Ap y Ap^C, a los sucesos siguientes, "Opción A del examen de Geografía", "Opción B del examen de Geografía", "aprobar la asignatura" y "no aprobar la asignatura", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 598/1150 = 0'52; p(Ap/A) = 78% = 0'78 ; p(Ab/B) = 74% = 0'74, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(aprobar la asignatura) = p(Ap) = p(A).p(Ap/A) + p(B).p(Ap/B) = (0'52)·(0'78) + (0'48)·(0'74) **= 951/1250 = = 0'7608**.
b)
Si se sabe que este alumno ha aprobado Geografía, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la opción A?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(A/Ap) =} \frac{p(A \cap Ap)}{p(Ap)} = \frac{p(A).p(Ap/A)}{p(C)} = \frac{(0'52)\cdot(0'78)}{0'7608} \textbf{ = 169/317} \cong \textbf{0'533}.$$

16_mod4_EJERCICIO 4 (B)
(2'5 puntos) La proporción de nacimientos que ocurren con luna llena en los hospitales de una ciudad se consideraba no inferior a 0'45, pero un estudio afirma que en la actualidad esta proporción ha descendido. Para contrastar esta hipótesis se han elegido al azar, en estos hospitales, a 200 recién nacidos, de los cuales 70 nacieron con luna llena. Decida mediante un contraste de hipótesis, con $H_0: p \geq 0'45$, si la afirmación del estudio es correcta con un nivel de significación del 1%, indicando la región de rechazo.

Solución

Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral ***p,*** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{P}$ *sigue* una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right) = N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0)}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, y gener*al-mente escribimos* $\hat{P} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\hat{P} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.
Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

La proporción de nacimientos que ocurren con luna llena en los hospitales de una ciudad se consideraba no inferior a 0'45, pero un estudio afirma que en la actualidad esta proporción ha descendido. Para contrastar esta hipótesis se han elegido al azar, en estos hospitales, a 200 recién nacidos, de los cuales 70 nacieron con luna llena. Decida mediante un contraste de hipótesis, con $H_0: p \geq 0'45$, si la afirmación del estudio es correcta con un nivel de significación del 1%, indicando la región de rechazo.

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

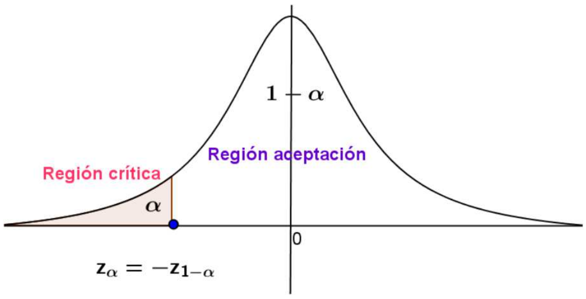
Datos del problema: p_0 = 0'45; n = 200; $\hat{p}$ = 70/200 = 0'35; nivel de significación = α = 1% = 0,01.
El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq 0'45$ (el número de nacidos no es inferior a 0'45) y $H_1 : p_0 < 0'45$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica está a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ *, y es un contraste unilateral*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto crítico que no dará la región crítica y la región de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - 2'33$ que separa las zonas de aceptación y rechazo; la región de rechazo es el intervalo (-∞,-2'33)

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es Z = $\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \frac{0'35 - 0'45}{\sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{200}}} \cong -2'8427$.

Recordamos que el punto crítico era $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -2'33$

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el valor observado del estadístico de prueba $z_0 = -2'8427$ está a la izquierda del punto crítico $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -2'33$, **nos encontramos en la región de rechazo** para **nivel de significación del 1%.**

Por tanto, **rechazamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \geq 0'45$, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : $p_0 < 0'45$, para el nivel de significación $\alpha = 0'01$.**

Con lo cual, con un nivel de significación del 1% el número de nacimientos en luna llena ha descendido.