OPCIÓN A

17_mod2_EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) Un fabricante de complementos alimenticios elabora dos tipos de bebidas energéticas a partir de tres componentes: taurina, cafeína y L-carnitina. Un envase del primer tipo de bebida precisa 30 g de taurina, 40 g de cafeína y 20 g de L-carnitina, mientras que uno del segundo necesita 40 g de taurina, 30 g de cafeína y 10 g de L-carnitina. Sabiendo que dispone de 52 kg de taurina, 46 kg de cafeína y 20 kg de L-carnitina, que cada envase del primer tipo se vende por 1.5 € y cada envase del segundo tipo por 1 €, ¿cuántos envases de cada tipo de bebida tendría que elaborar para obtener la ganancia máxima? ¿A cuánto ascendería esta ganancia?

Solución

Un fabricante de complementos alimenticios elabora dos tipos de bebidas energéticas a partir de tres componentes: taurina, cafeína y L-carnitina. Un envase del primer tipo de bebida precisa 30 g de taurina, 40 g de cafeína y 20 g de L-carnitina, mientras que uno del segundo necesita 40 g de taurina, 30 g de cafeína y 10 g de L-carnitina. Sabiendo que dispone de 52 kg de taurina, 46 kg de cafeína y 20 kg de L-carnitina, que cada envase del primer tipo se vende por 1'5 € y cada envase del segundo tipo por 1 €, ¿cuántos envases de cada tipo de bebida tendría que elaborar para obtener la ganancia máxima? ¿A cuánto ascendería esta ganancia?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de envases tipo A.
Sea y = nº de envases tipo B.

Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Taurina	Cafeina	L-Carnitina
Envase A (x)	30	40	20
Envase B (y)	40	30	10
Total	52000 g	46000 g	20000 g

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

De la cantidad de taurina $\rightarrow 30x + 40y \le 52000 \rightarrow 3x + 4y \le 5200$.
De la cantidad de cafeina $\rightarrow 40x + 30y \le 46000 \rightarrow 4x + 3y \le 4600$.
De la cantidad de L-carnitina $\rightarrow 20x + 10y \le 20000 \rightarrow 2x + y \le 2000$.
De "se fabrica algún envase tipo A o B" $\rightarrow$ $x \ge 0$, $y \ge 0$.
De "cada envase del primer tipo se vende por 1'5 € y cada envase del segundo tipo por 1 €,", tenemos que la función a optimizar es F(x,y) = 1'5x + 1y = 1'5x + y.

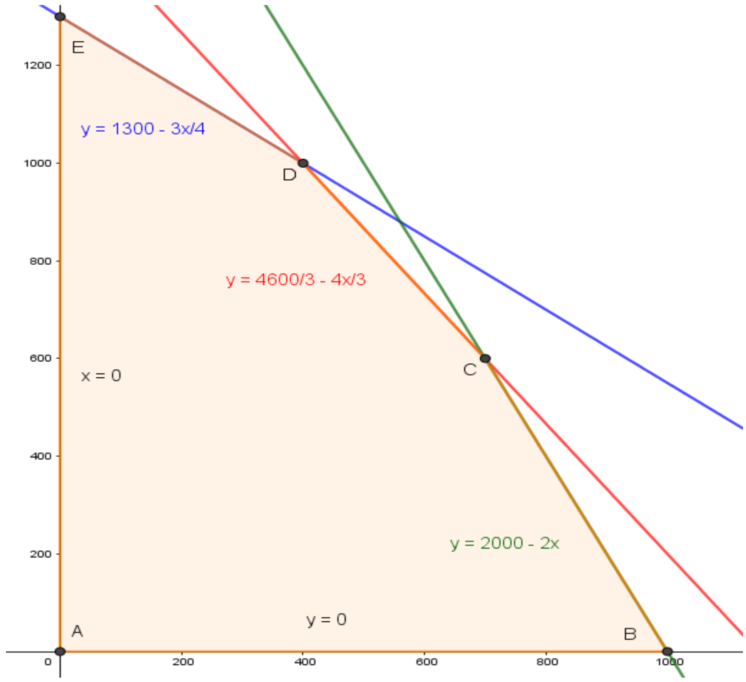
Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 1'5x + y.
Restricciones: $3x + 4y \le 5200$; $4x + 3y \le 4600$; $2x + y \le 2000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $3x + 4y \le 5200$**;** $4x + 3y \le 4600$**;** $2x + y \le 2000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $3x + 4y = 5200$**;** $4x + 3y = 4600$**;** $2x + y = 2000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 1300 - 3x/4; \quad y = 4600/3 - 4x/3; \quad y = 2000 - 2x; \; x = 0; \; y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y determinamos el polígono conexo limitado por los vértices A, B, C, D y E de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto convexo delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice A(0,0).
De $y = 0$ e $y = 2000 - 2x$, tenemos $0 = 2000 - 2x \rightarrow x = 1000$, y el vértice es B(1000,0).
De $y = 2000 - 2x$ e $y = 4600/3 - 4x/3$, tenemos $2000 - 2x = 4600/3 - 4x/3 \rightarrow 6000 - 6x = 4600 - 4x \rightarrow$
$\rightarrow 1400 = 2x$, con lo cual $x = 700$ e $y = 2000 – 2\cdot(700) = 600$, y el vértice es C(700,600).
De $y = 4600/3 - 4x/3$ e $y = 1300 - 3x/4$, tenemos $4600/3 - 4x/3 = 1300 - 3x/4 \rightarrow$
$\rightarrow 18400 - 16x = 15600 - 9x \rightarrow 2800 = 7x$, con lo cual $x = 400$ e $y = 1300 – 3\cdot(400)/4 = 1000$, y el vértice es D(400,1000).
De $x = 0$ e $y = 1300 - 3x/4$, tenemos $y = 1300$, y el vértice es E(0,1300).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(1000,0), C(700,600), D(400,1000) y E(0,1300).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 1'5x + y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto convexo, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(1000,0), C(700,600), D(400,1000) y E(0,1300). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,0) = 1'5(0) + (0) = 0$; $F_B(1000,0) = 1'5(1000) + (0) = 1500$; $\mathbf{F_C(700,600)} = 1'5(700) + (600) \mathbf{= 1650}$;
$F_D(400,1000) = 1'5(400) + (1000) = 1600$; $F_E(0,1300) = 1'5(0) + (1000) = 1000$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1650** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(700,600),** es decir **el beneficio máximo es de 1650€ y se alcanza fabricando 700 envases del tipo A y 600 envases del tipo B.**

17_mod2_EJERCICIO 2 (A)
Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, x, por la siguiente expresión: $R(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ -x^2+10x-16 & \text{si } 2 \le x \le 6 \end{cases}$, donde tanto x, como R(x), están expresadas en millones de euros.
a) (0'75 puntos) Estudie la continuidad de la función R.
b) (0'75 puntos) Esboce la gráfica de la función.
c) (1 punto) ¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta? ¿Para

qué valores de x la rentabilidad es positiva?

Solución

Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, x, por la siguiente expresión: $R(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ -x^2+10x-16 & \text{si } 2 \le x \le 6 \end{cases}$, donde tanto x, como R (x), están expresadas en millones de euros.

a)

Estudie la continuidad de la función R.

Las funciones "x – 2" y "$-x^2+10x-16$" son continuas en todo R, en particular en los intervalos donde están definidas. Sólo falta ver la continuidad en x = 2.

R(x) es continua en x = 2 si $R(2) = \lim_{x\to 2^-} R(x) = \lim_{x\to 2^+} R(x)$.

$\lim_{x\to 2^-} R(x) = \lim_{x\to 2^-} (x - 2) = 2 - 2 = 0$

$R(2) = \lim_{x\to 2^+} R(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2 + 10x - 16) = -(2)^2 + 10\cdot(2) - 16 = 0.$

Como los valores son iguales, R(x) es continua en x = 2, y por tanto R(X) es continua en [1,6].

b)

Esboce la gráfica de la función.

Si $1 \le x < 2$, R(x) = x – 2, que es un segmento que une los puntos (1,-1) y (2*,0)

Si $2 \le x < 4$, $R(x) = -x^2 + 10x - 16$ cuya gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo $\cap$, porque el número que multiplica a x^2 es negativo.

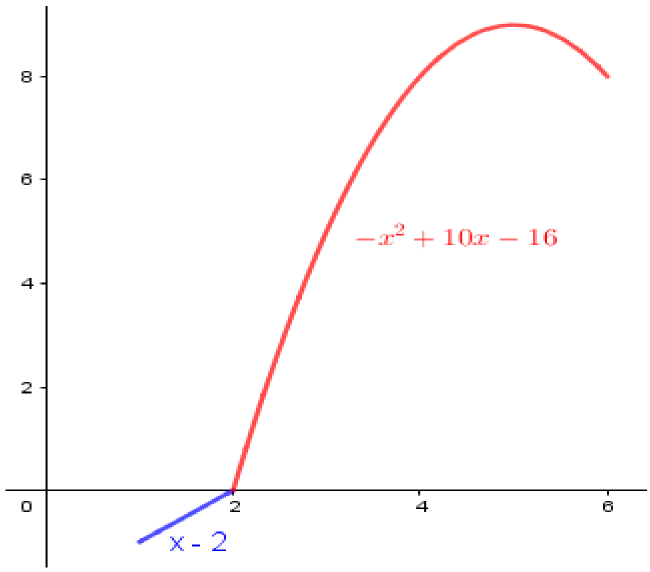
Calculamos su vértice (es un máximo, por la forma de la parábola) y sus valores en x = 2 y x = 6

$R(2) = -(2)^2 + 10\cdot(2) - 16 = 0$; $R(6) = -(6)^2 + 10\cdot(6) - 16 = 8$;

Abscisa del vértice es la solución de R '(x) = 0 = - 2x + 10 $\rightarrow$ 2x = 10, de donde x = 5.

Vértice = V(5,R(5)) = V(5, $-(5)^2 + 10\cdot(5) - 16$) = V(5,9)

Un esbozo de la gráfica es:



c)

¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta? ¿Para qué valores de x la rentabilidad es positiva?

Observando la gráfica vemos la máxima rentabilidad se encuentra en el vértice del trozo de parábola, que era el punto V(5,9), es decir **hay que invertir 5 millones de euros, para obtener una rentabilidad de 9 millones de euros.**

Observando la gráfica vemos **la rentabilidad es positiva encuentra en el trozo de parábola, es decir invirtiendo entre 2 y 6 millones de euros**

17_mod2_EJERCICIO 3 (A)

En un estudio sobre los niveles de audiencia de dos cadenas de radio, se obtuvo que el 50 % de la población escucha la cadena A, el 40 % escucha la cadena B y el 20 % oye ambas.
a) (1 punto) Halle el porcentaje de la población que escucha alguna de las dos cadenas.
b) (0'5 puntos) Calcule el porcentaje de la población que escucha solo la cadena B.
c) (1 punto) Halle el porcentaje de la población que escucha solo una de las dos cadenas.

Solución

En un estudio sobre los niveles de audiencia de dos cadenas de radio, se obtuvo que el 50 % de la población escucha la cadena A, el 40 % escucha la cadena B y el 20 % oye ambas.
a)
Halle el porcentaje de la población que escucha alguna de las dos cadenas.

Sean los sucesos A = "escuchar la cadena A" y B = "escuchar la cadena B".
Nos dan p(A) = 50% = 0'5, p(B) = 40% = 0'4, p(oye ambas) = p(A$\cap$B) = 20% = 0'2

Me están pidiendo **p(oye alguna) = p(A$\cup$B)** = p(A) + p(B) - p(A$\cap$B) = 0'5 + 0'4 – 0'2 **= 0'7 = 70%.**
b)
Calcule el porcentaje de la población que escucha solo la cadena B.

Me están pidiendo **p(escucha solo la cadena B) = p(B y noA) = p(B$\cap$A^C)** = p(B) - p(A$\cap$B) =
= 0'4 – 0'2 **= 0'2 = 20%:**
c)
Halle el porcentaje de la población que escucha solo una de las dos cadenas.

Me están pidiendo **p(escucha una de las dos cadenas) = p(A y noB) + p(B y noA) =**
= p(A$\cap$B^C) + p(B$\cap$A^C) = p(A) - p(A$\cap$B) + p(B) - p(A$\cap$B) = 0'5 – 0'2 + 0'4 – 0'2 **= 0'5 = 50%.**

17_mod2_EJERCICIO 4 (A)

En un centro docente hay 160 alumnos matriculados en 1º de ESO, 120 en 2º, 120 en 3º, 80 en 4º, 240 en 1º de Bachillerato y 200 en 2º. Se quiere constituir una comisión en la que todos los cursos estén representados de forma proporcional.
a) (1'25 puntos) ¿Cuántos alumnos debe haber en la comisión y cuántos de cada curso si dicha comisión está formada por el 5 % del total del alumnado?
b) (1'25 puntos) ¿Cuál sería la composición de la comisión si queremos que haya 9 alumnos de 2º de ESO?

Solución

En un centro docente hay 160 alumnos matriculados en 1º de ESO, 120 en 2º, 120 en 3º, 80 en 4º, 240 en 1º de Bachillerato y 200 en 2º. Se quiere constituir una comisión en la que todos los cursos estén representados de forma proporcional.
a)
¿Cuántos alumnos debe haber en la comisión y cuántos de cada curso si dicha comisión está formada por el 5 % del total del alumnado?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra es $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso tenemos: N = 160 + 120 +120 + 80 + 240 + 200 = $N_1+ N_2+ N_3+ N_4 + N_5 + N_6$ = 920, y la comisión "n" es el 5%, es decir n = 5% de 920 = (5·920)/100 = 46

Luego tenemos: $\frac{n}{N} = \frac{46}{920} = \frac{n_1}{160} = \frac{n_2}{120} = \frac{n_3}{120} = \frac{n_4}{80} = \frac{n_5}{240} = \frac{n_6}{200}$

De $\frac{46}{920} = \frac{n_1}{160}$, tenemos $n_1 = \frac{46 \cdot 160}{920} = 8$, luego **el tamaño de la muestra 1º ESO es n_1 = 8 alumnos**.

De $\frac{46}{920} = \frac{n_2}{120}$, tenemos $n_2 = \frac{46 \cdot 120}{920} = 6$, luego **el tamaño de la muestra 2º ESO es n_2 = 6 alumnos**.

De $\frac{46}{920} = \frac{n_3}{120}$, tenemos $n_3 = \frac{46 \cdot 120}{920} = 6$, luego **el tamaño de la muestra 3º ESO es n_2 = 6 alumnos**.

De $\frac{46}{920} = \frac{n_4}{80}$, tenemos $n_4 = \frac{46 \cdot 80}{920} = 4$, luego **el tamaño de la muestra 4º ESO es n_4 = 4 alumnos**.

De $\frac{46}{920}=\frac{n_5}{240}$, tenemos $n_5=\frac{46\cdot 240}{920}=12$, luego **el tamaño de la muestra 1º BACHILLER es n_5 = 12 alumnos**.

De $\frac{46}{920}=\frac{n_6}{200}$, tenemos $n_6=\frac{46\cdot 200}{920}=10$, luego **el tamaño de la muestra 2º BACHILLER es n_6 = 10 alumnos**.

b)

¿Cuál sería la composición de la comisión si queremos que haya 9 alumnos de 2º de ESO?

Ahora tenemos n_2 = 9. Luego tenemos: $\frac{n}{N}=\frac{n}{920}=\frac{n_1}{160}=\frac{9}{120}=\frac{n_3}{120}=\frac{n_4}{80}=\frac{n_5}{240}=\frac{n_6}{200}$

De $\frac{n}{920}=\frac{9}{120}$, tenemos $n=\frac{9\cdot 920}{120}=69$, luego **el tamaño de la muestra total es n = 69 alumnos**.

De $\frac{69}{920}=\frac{n_1}{160}$, tenemos $n_1=\frac{69\cdot 160}{920}=12$, luego **el tamaño de la muestra 1º ESO es n_1 = 12 alumnos**.

De $\frac{69}{920}=\frac{n_3}{120}$, tenemos $n_3=\frac{69\cdot 120}{920}=9$, luego **el tamaño de la muestra 3º ESO es n_2 = 9 alumnos**.

De $\frac{69}{920}=\frac{n_4}{80}$, tenemos $n_4=\frac{69\cdot 80}{920}=6$, luego **el tamaño de la muestra 4º ESO es n_4 = 6 alumnos**.

De $\frac{69}{920}=\frac{n_5}{240}$, tenemos $n_5=\frac{69\cdot 240}{920}=18$, luego **el tamaño de la muestra 1º BACHILLER es n_5 = 18 alumnos**.

De $\frac{69}{920}=\frac{n_6}{200}$, tenemos $n_6=\frac{69\cdot 200}{920}=15$, luego **el tamaño de la muestra 2º BACHILLER es n_6 = 15 alumnos**.

OPCIÓN B

17_mod2_EJERCICIO 1 (B)

Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \le 2x+1 \qquad y \le 13-4x \qquad x \ge 4-y$$

a) (0'5 puntos) Razone si el punto de coordenadas (1'1, 2'8) pertenece al recinto.
b) (1'5 puntos) ¿En qué puntos alcanza la función F(x,y) = −3x +1'5y sus valores extremos y cuáles son éstos?
c) (0'5 puntos) Razone si existe algún punto del recinto en el que la función F se anule.

Solución

Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \le 2x+1 \qquad y \le 13-4x \qquad x \ge 4-y$$

a)

Razone si el punto de coordenadas (1'1, 2'8) pertenece al recinto.

Tenemos que ver si el punto (1'1, 2'8) verifica todas las desigualdades:

$y \le 2x + 1 \rightarrow 2'8 \le 2\cdot(1'1) + 1 \rightarrow 2'8 \le 3'2$. CIERTO
$y \le 13-4x \rightarrow 2'8 \le 13 - 4\cdot(1'1) \rightarrow 2'8 \le 8'6$. CIERTO
$x \ge 4 - y \rightarrow 1'1 \ge 4 - 2'8 \rightarrow$ **1'1 ≥ 1'2. FALSO**

Como no verifica las tres inecuaciones el punto (1'1, 2'8) no pertenece al recinto

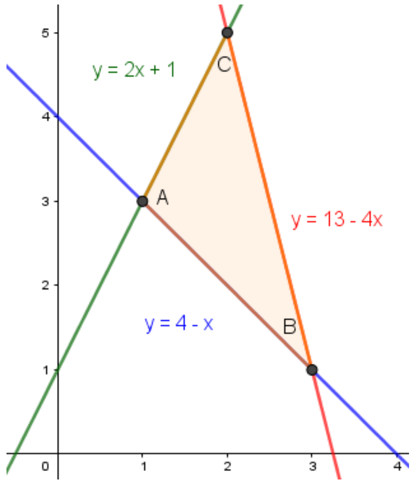
b)

¿En qué puntos alcanza la función F(x,y) = −3x +1'5y sus valores extremos y cuáles son éstos?

La representamos gráficamente y calculamos sus vértices.

Las desigualdades $y \le 2x+1$; $y \le 13-4x$; $x \ge 4-y$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $y \le 2x+1$; $y \le 13-4x$; $x \ge 4-y$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos $y = 2x+1$; $y = 13-4x$; $y = 4-x$.
Dibujamos las rectas, $y = 2x+1$; $y = 13-4x$; $y = 4-x$, tenemos en cuenta las desigualdades, observaremos cual es el polígono convexo o región factible y después sacaremos los vértices de dicho polígono convexo.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = 4 - x e y = 2x + 1, tenemos 4 - x = 2x + 1 $\rightarrow$ 3 = 3x, luego x = 3/3 = 1, con lo cual y = 4 - (1) = 3, y el punto de corte es A(1,3).
De y = 4 - x e y = 13 - 4x, tenemos 4 - x = 13 - 4x $\rightarrow$ 3x = 9, luego x = 9/3 = 3, con lo cual y = 4 - (3) = 1, y el punto de corte es B(3,1).
De y = 13 - 4x e y = 2x + 1, tenemos 13 - 4x = 2x + 1 $\rightarrow$ 12 = 6x, luego x = 12/6 = 2, con lo cual y = = 2(2) + 1 = 5, y el punto de corte es C(2,5).

Observamos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(1,3), B(3,1) y C(2,5).

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F(x,y) = -3x +1'5y en los puntos anteriores A(1,3), B(3,1) y C(2,5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(1,3) = -3(1) +1'5(3) **= 1'5**; **F_B(3,1) =** -3(3) +1'5(1) **= -7'5**; **F_C(2,5) =** -3(2) +1'5(5) **= 1'5**;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1'5** (el mayor valor en los vértices) **y se alcanza en los vértices A(1,3) y C(2,5), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento AC, y el mínimo absoluto de la función F en la región es -7'5** (el menor valor en los vértices) **y se alcanza en el vértice B(3,1).**

17_mod2_EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en x =1.
b) (1 punto) Para a = 3 y b =−2, estudie la monotonía y curvatura de la función f.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a)
Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en x =1.

Sabemos que si la función es derivable en x = 1, también es continua en x = 1. Estudiamos primero la continuidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax - 3x^2) = a(1) - 3(1)^2 = a - 3.$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-3x^2 + b) = -3(1)^2 + b = -3 + b$, como tienen que ser iguales tenemos a - 3 = -3 + b, de donde **a = b.**

f(x) es derivable en x = 1 si f '(1^-) = f '(1^+) (Vemos la continuidad de la derivada).

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} a - 6x & \text{si } x \le 1 \\ 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f '(1^-) = $\lim_{x\to1^-}$ f '(x) = $\lim_{x\to1^-}$ (a - 6x) = a - 6(1) = a - 6**.**

f '(2^+) = $\lim_{x\to1^+}$ f '(x) = $\lim_{x\to1^+}$ (4x) = 4(1) = 4. Igualando tenemos a - 6 = 4, **de donde a = 10 = b.**

b)

Para a = 3 y b = -2, estudie la monotonía y curvatura de la función f.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} 3x - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 3 - 6x & \text{si } x < 1 \\ 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Se observa que la función es continua en x = 1, y no derivable en x = 1 porque por el apartado (A) tendrían que ser a = b = 10.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si x < 1, f '(x) = 3 - 6x.

De f '(x) = 0, tenemos 3 - 6x = 0, luego x = 3/6 = 0'5, que es un posible extremo relativo derivable.

Como f '(0) = 3 – 6(0) = 3 > 0, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞,0'5).**

Como f '(0'7) = 3 – 6(0'7) = -1'2 < 0, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0'5,1).**

Por definición x = 0'5 es un máximo relativo de f derivable, y vale f(0'5) = 0'75.

Si x > 1, f '(x) = 4x.

De f '(x) = 0 tenemos 4x = 0, luego x = 0, *que no está en el dominio* (x > 1) y **no es** un posible extremo relativo derivable.

Como f '(2) = 4(2) = 8 > 0, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1,+∞).**

Por definición x = 1 es un mínimo relativo de f <u>no derivable</u>, y vale f(1) = 0.

Por tanto f(x) es estrictamente decreciente $(\nearrow)$ **en (-∞,0'5)∪ (1,+∞), y es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0'5,1).**

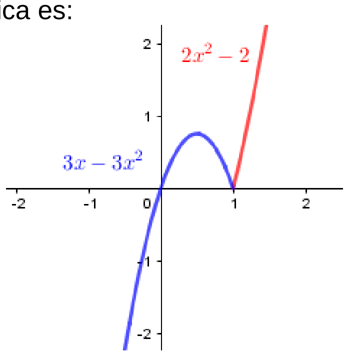
Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f ''(x).

Si x < 1, f ''(x) = - 6 < 0, luego **f es cóncava (∩) en (-∞,1).**

Si x > 1, f ''(x) = 4 > 0, luego **f es convexa (∪) en (1,+∞).**

Por definición x = 1 es un punto de inflexión de f no derivable.

Aunque no lo pide un esbozo de la gráfica es:



17_mod2_EJERCICIO 3 (B)

A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado SÍ.

a) (0'9 puntos) Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.

b) (0'8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado SÍ a la huelga?
c) (0'8 puntos) Si elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales?

Solución

A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado SÍ.

a)
Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.

Llamemos Em, Rl, D, S y N, a los sucesos siguientes, "alumnos de Empresariales", "alumnos de Relaciones Laborales", alumnos de Derecho", "SI a la huelga" y "NO a la huelga", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Empresari.	Relaciones Lab.	Derecho	Totales
SI huelga = S				
No huelga = N	1/3 de Empresariales	16	2/3 de Derecho	
Totales	180	72		420

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Empresari.	Relaciones Labo.	Derecho	Totales
SI huelga = S	**120**	**56**	**56**	**232**
No huelga = N	**60**	16	**112**	**188**
Totales	180	72	**168**	420

Piden la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.

p(de Empresariales y SI a la huelga) = p(Em$\cap$S) = $\dfrac{\text{Total alumnos Epresariales y SI a la huelga}}{\text{Total alumnos}}$ =

= 120/420 **= 2/7** $\cong$ **0'2857**.

b)
¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado SÍ a la huelga?

p(SI a la huelga) = $\dfrac{\text{Total alumnos SI a la huelga}}{\text{Total alumnos}}$ = 232/420 = 58/105 $\cong$ **0'55238**.

c)
Elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales?

p(de Relaciones Laborales /NO a la huelga) = **p(Rl/N)** =

= $\dfrac{\text{Total alumnos NO a la huelga y de Relaciones Laborales}}{\text{Total alumnos NO a la huelga}}$ = 16/188 = 4/47 $\cong$ **0'0851.**

17_mod2_EJERCICIO 4 (B)

El tiempo diario, en horas, que dedican los alumnos de una Facultad a las redes sociales sigue una ley Normal de desviación típica 2 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 alumnos con los siguientes tiempos en horas

6'5 7 6'25 7 5'5 7'25 6'75 6'25 6 6'5

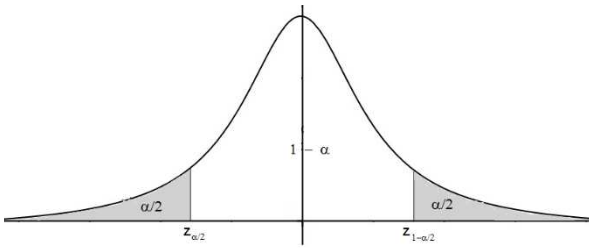
a) (1'5 puntos) Determine el intervalo de confianza, al 90 %, para el tiempo medio diario dedicado por los alumnos de esa Facultad a las redes sociales.
b) (1 punto) Utilizando el mismo nivel de confianza anterior, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario, para un error de estimación máximo de 0'1 horas.

Solución

El tiempo diario, en horas, que dedican los alumnos de una Facultad a las redes sociales sigue una ley Normal de desviación típica 2 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 alumnos con los siguientes tiempos en horas

6'5 7 6'25 7 5'5 7'25 6'75 6'25 6 6'5

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Determine el intervalo de confianza, al 90 %, para el tiempo medio diario dedicado por los alumnos de esa Facultad a las redes sociales.

Datos del problema: σ = 0'5; n = 10; $\overline{x}$ = (6'5+7+6'25+7+5'5+7'25+6'75+6'25+6+6'5)/10 = 6'5; nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'1, con la cual α/2 = 0'1/2 = 0'05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene; los más próximos son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, luego $z_{1-\alpha/2}$ es el punto medio de ambos, luego $z_{1-\alpha/2}$ = (1'64+1'65)/2 = 1'645, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6'5 - 1'645\cdot\frac{2}{\sqrt{10}},\ 6'5 - 1'645\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \cong$ **(5'4596,7'5404)**

b)
Utilizando el mismo nivel de confianza anterior, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario, para un error de estimación máximo de 0'1 horas.

Datos del problema: Error = E ≤ 0'1, σ = 2, igual nivel de confianza = 90% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1'645.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 0'1, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'645\cdot 2}{0'1}\right)^2$ ≅ 1082'41, es decir **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 1083 alumnos.**