OPCIÓN A

15_mod5_EJERCICIO 1 (A)

a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) (1 punto) Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:

$2A - 3B \qquad A\cdot A^t - C^2 \qquad A\cdot D$

Solución

a)

Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, con lo cual la ecuación $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ se transforma en $A\cdot X = B^2\cdot C$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$.

Multiplicando por la izquierda la expresión $A\cdot X = B^2\cdot C$ por la inversa A^{-1}, tenemos $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B^2\cdot C) \rightarrow$
$\rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(B^2\cdot C) \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot (B^2\cdot C)}$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$; $|A| = -13$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $Adj(D^t) = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t) = \frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 & 3/13 \\ 1/13 & -2/13 \end{pmatrix}$. Tenemos $B^2\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matriz es $\mathbf{X = A^{-1}\cdot (B^2\cdot C) =} \frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -23 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/13 \\ 2/13 \end{pmatrix}$ **.**

b)

Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B, C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:

$2A_{3x2} - 3B$; $A_{3x2}\cdot A^t_{\ 2x3} - C^2$; $A_{3x2}\cdot D$

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz. También sabemos que se pueden sumar matrices del mismo orden.

Teniendo en cuenta lo anterior:

La operación $2A_{3x2} - 3B$, **es posible si B tiene de orden 3x2.**

La operación $A_{3x2}\cdot A^t_{\ 2x3} - C^2 = E_{3x3} - C^2$, **es posible si C tiene de orden 3x3.**

La operación $A_{3x2}\cdot D$, **es posible si D tiene de orden 2x3.**

18_mod5_EJERCICIO 2 (A)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) (0'75 puntos) Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.

c) (0'5 puntos) Calcule las asíntotas de f, en caso de que existan.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a)

Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

Sabemos que si la función $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$ es continua y derivable en todo R – {4}, en particular es continua en su dominio "x < 3".

Sabemos que la función $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ es continua y derivable en todo R, en particular es continua en el intervalo $[3, +\infty)$ y derivable en el abierto $(3, +\infty)$.

Falta ver la continuidad y derivabilidad en x = 3.

f(x) es continua en x = 3 si $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x^2 + 7x - 10) = -(3)^2 + 7(3) - 10 = 2$; $f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{x-5}{x-4}\right) = \left(\frac{3-5}{3-4}\right) = 2$.

Como los tres valores son iguales la función f es continua en x = 3, luego continua en R.

f(x) es derivable en x = 3 si f '(3⁻) = f '(3⁺) (Vemos la continuidad de la derivada)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{x-4-1\cdot(x-5)}{(x-4)^2} & \text{si } x < 3 \\ -2x+7 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(x-4)^2} & \text{si } x < 3 \\ -2x+7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{1}{(x-4)^2}\right) = \frac{1}{(3-4)^2} = 1$; $f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} (-2x + 7) = -2(3) + 7 = 1$.

Como $f'(3^-) = f'(3^+) = 1$, la función f es derivable en x = 3, luego derivable en R.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-4)^2} & \text{si } x < 3 \\ -2x+7 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b)
Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-4)^2} & \text{si } x < 3 \\ -2x+7 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Si x = 0 (rama x < 3) f(0) = (0 – 5)/(0 – 4) = 5/4 = 1'25. **Punto (0, 1'25)**
Si f(x) = 0, tenemos:

(rama x < 3) $\frac{x-5}{x-4} = 0$, de donde x – 5 = 0, por tanto x = 5. **NO ESTÁ EN EL DOMINIO x < 3**

(rama x ≥ 3) $-x^2 + 7x - 10 = 0 \to x^2 - 7x + 10 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$, de donde x = 5, y x = 2,

NO ESTÁ EN EL DOMINIO x ≥ 3. Punto (5, 0)

c)
Calcule las asíntotas de f, en caso de que existan.

Tenemos la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{x-4} & \text{si } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Para x ≥ 3, $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ es una función polinómica, y sabemos que **no tiene asíntotas para x ≥ 3**

Para x < 3 $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$, que tendría una asíntota vertical en x = 4, pero no está en x < 3.

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(-x)-5}{(-x)-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to +\infty} (1) = 1$, **la recta y = 1 es una asíntota horizontal en - ∞.**

Como $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - AH) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x-5}{x-4} - (1)\right) = 0^+$, *la gráfica de f está por encima de la asíntota horizontal y = 1 en = - ∞.*

18_mod5_EJERCICIO 3 (A)

Se ha realizado un referéndum en el que se ha convocado a la ciudadanía a expresar con "SÍ" o con "NO" su opinión sobre cierta cuestión. En una determinada mesa electoral hay tres urnas que contienen las siguientes papeletas: la urna A tiene 200 papeletas con "SÍ" y 300 con "NO", la urna B, 500 "SÍ" y 400 "NO" y la urna C contiene 200 "SÍ" y 100 "NO".

Se elige una urna al azar y de ella se extrae aleatoriamente una papeleta.

a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que sea un "SÍ".

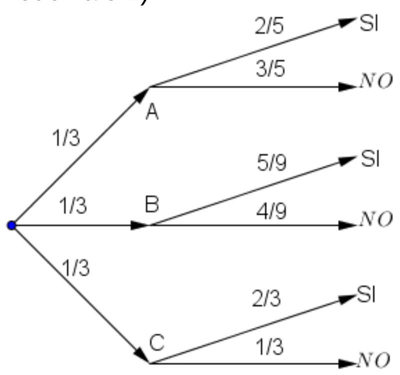
b) (1 punto) Si la papeleta extraída es "NO", calcule la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

Solución

Llamemos A, B, C, SI y NO, a los sucesos siguientes, "urna A", "urna B", "urna C", "votar SI " y "votar NO", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = p(B) = p(C) = 1/3; p(SI/A) = 200/500 = 2/5; p(SI/B) = 500/900 = 5/9, p(SI/C) =
= 250/500 = 1/2 = 0'5, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

Calcule la probabilidad de que sea un "SÍ".

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(SI)** = p(A).p(SI/A) + p(B).p(SI/B) + p(C).p(SI/C) =
= (1/3)·(2/5) + (1/3)·(5/9) + (1/3)·(2/3) **= 73/135 ≅ 0'54074**.

b)

Si la papeleta extraída es "NO", calcule la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

Me piden **p(A/NO)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/NO) =} \frac{p(A \cap NO)}{p(NO)} = \frac{p(A)\cdot p(NO/A)}{1 - p(SI)} = \frac{(1/3)\cdot(3/5)}{1 - 73/135} \mathbf{= 27/62 \cong 0'4355}.$$

18_mod5_EJERCICIO 4 (A)

La calificación que obtiene el alumnado en una determinada asignatura sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 3 puntos.

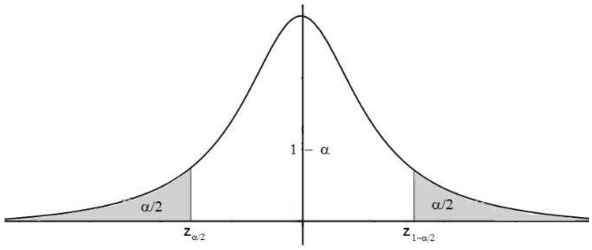
a) (1'5 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 alumnos, resultando una calificación media de 5'7 puntos. Calcule un intervalo de confianza para estimar μ a un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 0'5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

Solución

La calificación que obtiene el alumnado en una determinada asignatura sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 3 puntos.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{x}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{x} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{x} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$*.*

a)
Se toma una muestra aleatoria simple de 100 alumnos, resultando una calificación media de 5'7 puntos. Calcule un intervalo de confianza para estimar μ a un nivel de confianza del 95%.
Datos del problema: σ = 3; n = 100; $\overline{x}$ = 5'7; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5'7 - 1'96\cdot\frac{3}{\sqrt{100}}, 5'7 + 1'96\cdot\frac{3}{\sqrt{100}}\right)$ = **(5'112; 6'288), para la nota media de la asignatura.**

b)
Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 0'5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: σ = 3; error = E ≤ 0'5, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575\cdot 3}{0'5}\right)^2$ = 238'7025, por tanto **el tamaño mínimo de los alumnos que hay que seleccionar es n = 239.**

OPCION B

18_mod5_EJERCICIO 1 (B)

(2'5 puntos) Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7'5 kg de fibra de carbono y 6'5 kg de goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A. Calcule cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determine su importe.
¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

Solución

Una fábrica de palas de pádel produce dos modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente. Para la elaboración de una pala del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y 100 g de goma EVA, mientras que para una pala del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono y 50 g de goma EVA. La fábrica dispone diariamente de 7'5 kg de fibra de carbono y 6'5 kg de

goma EVA y quiere producir como máximo 60 unidades diarias del modelo A. Calcule cuántas palas de cada modelo tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo y determine su importe.
¿Sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de palas de pádel modelo A.
Sea y = nº de palas de pádel modelo B.

	Fibra de Carbono	Goma EVA	Total	Precio
Pala tipo A (x)	90 g	100 g	60	30 €
Pala tipo B (y)	100 g	50 g		20 €
Total	7500 g	6500 g		

De “del modelo A se necesitan 90 g de fibra de carbono y del modelo B son necesarios 100 g de fibra de carbono” → $90x + 100y \le 7500y$.
De “del modelo A se necesitan 100 g de goma EVA y del modelo B son necesarios 50 g de goma EVA” → $100x + 50y \le 6500$.
De “como máximo 60 unidades diarias del modelo A” → $x \le 60$
De “se fabrica alguna pala tipo A y tipo B” → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

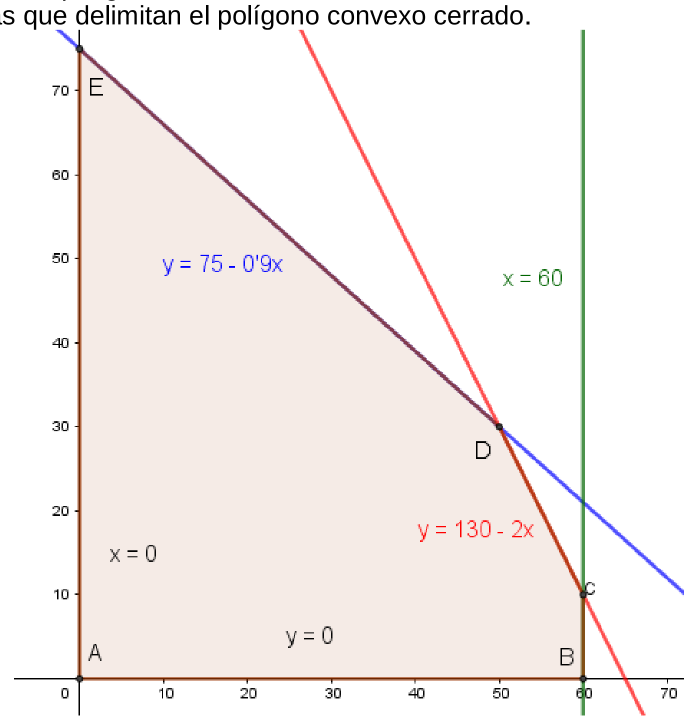
De “modelos A y B con los que obtiene un beneficio por cada pala de 30 y 20 euros respectivamente”, tenemos la función a optimizar es B(x,y) = F(x,y) = 30x + 20y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x,y) = 30x + 20y.
Restricciones: $90x + 100y \le 7500$; $100x + 50y \le 6500$; $x \le 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $9x + 10y \le 750$; $10x + 5y \le 650$; $x \le 60$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $9x + 10y = 750$; $10x + 5y = 650$; $x = 60$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos $y = - 0'9x + 75$; $y = -2x + 130$; $x = 60$; $x = 0$; $y = 0$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades originales, y determinamos el polígono convexo cerrado; con el cual calcularemos los vértices A, B, C, D y E de los cortes de las rectas que delimitan el polígono convexo cerrado.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el vértice A(0,0).
De y = 0 y x = 60, tenemos el vértice es B(60,0).

De $x = 60$ e $y = -2x + 130$, tenemos $y = -2(60) + 130 = 10$, y el vértice es C(60,10).
De $y = -2x + 130$ e $y = -0'9x + 75$, tenemos $-2x + 130 = -0'9x + 75 \rightarrow 55 = 1'1x \rightarrow x = 55/1'1 = 50$, por tanto $y = -2(50) + 130 = 30$, el vértice es D(50,30).
De $x = 0$ e $y = -0'9x + 75$, tenemos $y = 75$, y el vértice es E(0,75).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(50,0), C(60,10), D(50,30) y E(0,75).

Veamos la solución óptima de la función $F(x,y) = 30x + 20y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(50,0), C(60,10), D(50,30) y E(0,75). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0,0) = 30(0) + 20(0) = 0$; $F_B(50,0) = 30(50) + 20(0) = 1500$; $F_C(60,10) = 30(60) + 20(10) = 2000$;
$\mathbf{F_D(50,30) =}$ $30(50) + 20(30)$ $\mathbf{= 2100}$; $F_E(0,75) = 30(0) + 20(75) = 1500$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2100** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(50,30), por tanto el máximo beneficio es de 2100 €, y se obtiene fabricando 50 palas de pádel del modelo A y 30 palas de pádel del modelo B.**

Preguntan si sería posible una producción diaria de 49 palas del modelo A (x) y 32 palas del modelo B (y).
La respuesta es afirmativa si verifica todas las restricciones:

$9x + 10y \le 750 \rightarrow 9(49) + 10(32) \le 750 \rightarrow 761 \le 750$ **FALSO**
$10x + 5y \le 650 \rightarrow 10(49) + 5(32) \le 650 \rightarrow 650 \le 650$ CIERTO
$x \le 60 \rightarrow 49 \le 60$ CIERTO
$x \ge 0 \rightarrow 49 \ge 0$ CIERTO
$y \ge 0 \rightarrow 32 \ge 0$ CIERTO

No es posible una producción diaria de 49 palas del modelo A y 32 palas del modelo B, pues no verifica la primera restricción.

18_mod5_EJERCICIO 2 (B)

a) (1'5 puntos) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{5x}\cdot(x^2 - 5)^3$ $g(x) = \dfrac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$

b) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x+10}{x+5}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución

a)

Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{5x}\cdot(x^2 - 5)^3$ $g(x) = \dfrac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$

De $f(x) = e^{5x}\cdot(x^2 - 5)^3$ tenemos $f'(x) = (e^{5x}\cdot 5)\cdot(x^2 - 5)^3 + e^{5x}\cdot(3\cdot(x^2 - 5)^2\cdot 2x) =$
$= e^{5x}\cdot(x^2 - 5)^2\cdot[5\cdot(x^2 - 5)^2 + 3\cdot 2x] = e^{5x}\cdot(x^2 - 5)^2\cdot(5\cdot x^2 + 6x - 25)$

$$\text{De } g(x) = \frac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)} \text{ tenemos } g'(x) = \frac{\left(2(x^3+1)^1\cdot 3x^2\right)\cdot\ln(x^2+2) - (x^3+1)^2\cdot\left(\dfrac{2x}{\ln(x^2+2)}\right)}{\left(\ln(x^2+2)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2(x^3+1)^1\cdot 3x^2\right)\cdot\ln(x^2+2) - (x^3+1)^2\cdot\left(\dfrac{2x}{\ln(x^2+2)}\right)}{\left(\ln(x^2+2)\right)^2} = \frac{2(x^3+1)\cdot\left(3x^2\cdot\left(\ln(x^2+2)\right)^2 - x\cdot(x^3+1)^2\right)}{\left(\ln(x^2+2)\right)^3}$$

b)

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{x+10}{x+5}$ en el punto de abscisa $x=0$.

La recta tangente en x = 0 es "y - h(0) = h '(0)·(x - 0)

De $h(x) = \frac{x+10}{x+5}$, tenemos **h(0)** = 10/5 **= 2**.

De $h'(x) = \frac{1\cdot(x+5) - (x+10)\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-5}{(x+5)^2}$, tenemos **h ´(0)** = -5/25 = **-1/5 = 2'5.**

Luego la recta tangente en x = 0 es **y - 2 = (-1/5)·(x - 0) ó 5y - 10 = -1x ó x + 5y – 10 = 0.**

18_mod5_EJERCICIO 3 (B)

En una concentración de 250 deportistas hay 120 que juegan al fútbol, 60 que juegan al tenis y 70 que juegan al baloncesto. El 75% de los que juegan al fútbol, el 65% de los que juegan al tenis y el 60% de los que juegan al baloncesto son además aficionados al ciclismo.

Se selecciona al azar uno de los deportistas.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al ciclismo?

b) (1 punto) Si es aficionado al ciclismo, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al tenis?

Solución

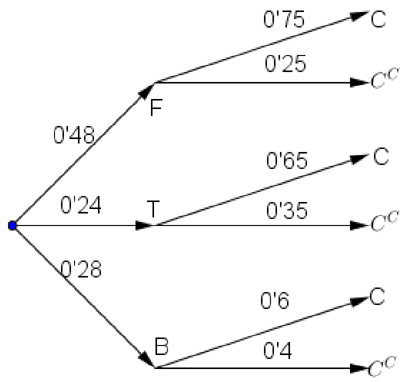
En una concentración de 250 deportistas hay 120 que juegan al fútbol, 60 que juegan al tenis y 70 que juegan al baloncesto. El 75% de los que juegan al fútbol, el 65% de los que juegan al tenis y el 60% de los que juegan al baloncesto son además aficionados al ciclismo.

Se selecciona al azar uno de los deportistas.

Llamemos F, T, B, C y C^C, a los sucesos siguientes, "juega al futbol", "juega al tenis", "juega al baloncesto", "aficionado al ciclismo" y "no aficionado al ciclismo", respectivamente.

Datos del problema: p(F) = 120/250 = 0'48; p(T) = 60/250 = 0'24; p(B) = 70/250 = 0'28; p(C/F) = 75% = 0'75; p(C/T) = 64% = 0'65, p(C/B) = 60% = 0'6, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al ciclismo?

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(C)** = p(F)·p(C/F) + p(T)·p(C/T) + p(B)·p(C/B) =
= (0'48)·(0'75) + (0'24)·(0'65) + (0'28)·(0'6) **= 171/250 = 0'684**.

b)

Si es aficionado al ciclismo, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al tenis?

Me piden **p(T/C)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(T/C)} = \frac{p(T \cap C)}{p(C)} = \frac{p(T)\cdot p(C/T)}{p(C)} = \frac{(0'24)\cdot 0'65}{0'684} = \mathbf{13/54 \cong 0'24074}.$$

18_mod5_EJERCICIO 4 (B)

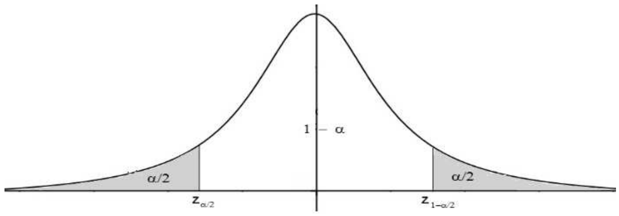
Una cadena de supermercados desea estimar la proporción de clientes que adquiere un determinado producto. Para ello ha tomado una muestra aleatoria simple de 1000 clientes y ha observado que 300 compraban ese producto.

a) (1'5 puntos) Halle, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes del supermercado que compra ese producto.
b) (1 punto) Si en otra muestra la proporción de clientes que compra ese producto es de 0'25 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 92'5%, calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Solución

Una cadena de supermercados desea estimar la proporción de clientes que adquiere un determinado producto. Para ello ha tomado una muestra aleatoria simple de 1000 clientes y ha observado que 300 compraban ese producto.

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y gen*eralmente escribimos **p*** $\approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* ***p*** $\rightarrow N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

*I.C.(**p**)* = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ = *(b-a)*

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈ N(0,1) que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es n >* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

a)
Halle, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes del supermercado que compra ese producto.

Datos del problema: n = 1000; $\hat{p}$ = 300/1000 = 0'3, $\hat{q}$ = 1 - 0'3 = 0'7, nivel de confianza = 95% = 0'95 = = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(**p**) = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = = \left(0'3 - 1'96.\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{1000}}, 0'3 + 1'96.\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{1000}}\right) \cong$ **(0'2716; 0'3284).**

b)
Si en otra muestra la proporción de clientes que compra ese producto es de 0'25 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 92'5%, calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'25, $\hat{q}$ = 0'75, error = E ≤ 0'03, nivel de confianza = 92'5% = 0'925 = 1 - α, de donde α = 0'075, con la cual α/2 = (0'075)/2 = 0'0375.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'0375 = 0'9625$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'9625 viene, corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'78.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'78)^2\cdot 0'25\cdot 0'75}{(0'03)^2} \cong$ 660'0833, por tanto **el tamaño mínimo de los clientes que hay que seleccionar es n = 661.**