OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2 puntos) Dibuje el recinto del plano limitado definido por las inecuaciones:

$$5x + y \le 5;\ \ 9y - 2x \ge 0;\ \ x + 2y \ge 2;\ \ x \ge 0$$

y determine sus vértices.

b) (1punto) Determine, en ese recinto, los puntos donde la función $F(x,y) = 6x + y - 3$ toma los valores máximo y mínimo.

Solución

a) y b)

Dibuje el recinto del plano limitado definido por las inecuaciones: $5x + y \le 5$; $9y - 2x \ge 0$; $x + 2y \ge 2$; $x \ge 0$ y determine sus vértices. Determine, en ese recinto, los puntos donde la función $F(x,y) = 6x + y - 3$ toma los valores máximo y mínimo.

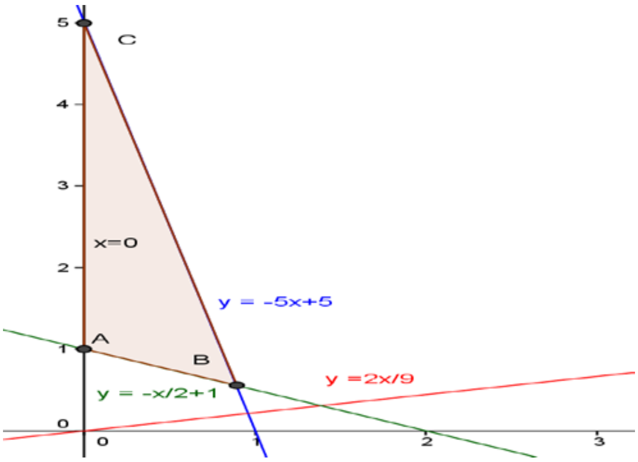
Función Objetivo $F(x,y) = 6x + y - 3$.

Las desigualdades $5x + y \le 5$; $9y - 2x \ge 0$; $x + 2y \ge 2$; $x \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $5x + y = 5$; $9y - 2x = 0$; $x + 2y = 2$; $x = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -5x + 5\ ;\ \ y = 2x/9;\ \ y = -x/2 + 1;\ \ x = 0..$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = -x/2+1$, tenemos $y = 1$, y el punto de corte es $A(0,1)$.
De $y = -x/2+1$ e $y = -5x+5$, tenemos $-x/2+1 = -5x+5$, luego $-x+2 = -10x + 10$, es decir $9x = 8$, por tanto $x=8/9$ e $y = -(8/9)/2+1 = 5/9$, y el punto de corte es $B(8/9,5/9)$.
De $y = -5x+5$ y $x = 0$, tenemos $y = 5$, y el punto de corte es $C(0,5)$.

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: $A(0,1)$, $B(8/9,5/9)$ y $C(0,5)$.

Calculemos el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = 6x + y - 3$ en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores $A(0,1)$, $B(8/9,5/9)$ y $C(0,5)$. En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,1) = 6(0) + 1(1) - 3 **= -2**; **F(8/9,5/9)** = 6(8/9) + 1(5/9) - 3 **= 26/9 ≅ 2'89**; F(2,7) = 6(0) + 1(5) - 3 = 2;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 26/9** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en los vértices B(8/9,5/9), y el mínimo absoluto de la función F en la región es -2** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(0,1).**

EJERCICIO 2_A

(3 puntos) El beneficio de una empresa viene dado por la función $f(x) = (225/2) + 20x - (1/2)x^2$ donde *x*

representa el gasto en publicidad.
a) (0'5 puntos) Calcule el gasto *x* a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.
c) (1 punto) Represente gráficamente la función *f*.
d) (0'5 puntos) Calcule el valor de *x* que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio máximo?

Solución

a), b), c) y d)
El beneficio de una empresa viene dado por la función $f(x) = (225/2) + 20x - (1/2)x^2$ donde *x* representa el gasto en publicidad.
Calcule el gasto *x* a partir del cual la empresa no obtiene beneficios. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función. Represente gráficamente la función *f*. Calcule el valor de *x* que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio máximo?

c) La gráfica de $f(x) = (225/2) + 20x - (1/2)x^2$, es una parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo; abscisa de su vértice V en $f'(x) = 0 = 20 - x \rightarrow x = 20$, es decir su vértice es $V(20, f(20)) = V(20,625/2) = V(20,312'5)$. Sus cortes con los ejes son:
Para $x = 0$, punto $(0,225/2) = (112'5,0)$.
Para $f(x) = 0 = (225/2) + 20x - (1/2)x^2 \rightarrow x^2 - 40x - 225 = 0 \rightarrow x = \dfrac{40 \pm \sqrt{40^2 + 4 \cdot 225}}{2} = \dfrac{40 \pm 50}{2}$, de donde $x = -5$ y $x = 45 \rightarrow$ puntos $(-5,0)$ y $(45,0)$.

Un esbozo de la función es:

a) Como "x" indica gasto se supone que $x > 0$, por tanto el beneficio es nulo con $x \geq 45$, pues a partir de ese momento $f(x) < 0$.
b)
Como es una parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), la función es estrictamente creciente hasta el vértice y estrictamente decreciente a partir del vértice, es decir:
$f(x)$ es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(0,20)$ y estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(20,45)$. Sólo nos hemos referido a los valores de "x" en los cuales $f(x) \geq 0$.
d)
Calcule el valor de *x* que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio máximo?
Cómo es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$) el máximo se encuentra en el vértice $V(20,312'5)$, es decir el máximo beneficio se produce para $x = 20$, y dicho beneficio es $312'5$.

EJERCICIO 3_A

Parte I
En un conjunto de estudiantes el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.
a) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "estudiar alemán" y "estudiar francés"?
Justifique la respuesta.
b) (1 punto) Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.

Solución

En un conjunto de estudiantes el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.
a)
¿Son independientes los sucesos “estudiar alemán” y “estudiar francés”? Justifique la respuesta.

Llamamos A y B a los sucesos “estudia alemán” y “estudia francés”.
Del problema tenemos: p(A) = 15% = 0’15, p(B) = 30% = 0’3, p(ambas) = $p(A\cap B)$ = 10% = 0’10.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

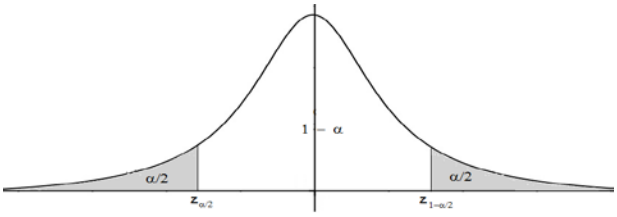
Me piden **¿son independientes A y B?.**
Como $p(A\cap B) = \mathbf{0'10} \neq p(A)\cdot p(B) = 0'15\cdot 0'3 = \mathbf{0'045}$, **A y B no son independientes.**
b)
Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.
Me piden $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$
Tenemos $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'15 + 0'3 - 0'10 = 0'35$
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B) = 1 - 0'35$ **= 0’65.**
Luego $\mathbf{p(A^C\cap B^C) = 0'65}$**.**

EJERCICIO 3_A

Parte II
A 400 personas elegidas al azar se les ha preguntado su gasto anual en libros, obteniéndose una cantidad media de 22000 ptas. Con independencia de esta muestra se sabe que la desviación típica de la inversión en libros en la población es de 4000 ptas.
a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza al 90% y centrado, para la media poblacional de esta inversión.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese (21904, 22096)?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

A 400 personas elegidas al azar se les ha preguntado su gasto anual en libros, obteniéndose una cantidad media de 22000 ptas. Con independencia de esta muestra se sabe que la desviación típica de la inversión en libros en la población es de 4000 ptas.

a)
Halle un intervalo de confianza al 90% y centrado, para la media poblacional de esta inversión.

Datos del problema: n = 400, $\overline{x}$ = 22000, σ = 4000; nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α =
= 0'10, es decir $\alpha/2$ = 0'10/2 = 0'05.
De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, las más próximas son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645, y el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(22000 - 1'645\cdot\frac{4000}{\sqrt{400}}, 22000 + 1'645\cdot\frac{4000}{\sqrt{400}}\right) = \mathbf{(21671,22329).}$$

b)
¿Qué tamaño muestral sería necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese (21904, 22096)?

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (21904, 22096), σ = 4000, $z_{1-\alpha/2}$ = 1'645.

De la amplitud del intervalo es b – a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (22096 – 21904) = $2\cdot 1'645\cdot\dfrac{4000}{\sqrt{n}}$, es decir
n = $(13160/192)^2 \cong$ 4797'96**, por tanto n = 4798.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial: A·X + 2B = A^t, siendo A^t la matriz traspuesta de A.
b) (1 punto) Calcule la matriz A^{2000}.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a)
Resuelva la ecuación matricial: A·X + 2B = A^t, siendo A^t la matriz traspuesta de A.
De A·X + 2B = A^t, tenemos A·X = A^t + 2B = C

Como |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 – 0 = 1≠ 0, existe su matriz inversa A^{-1} = = (1/|A|)·Adj(A^t).

Multiplicando la expresión A·X = C por la izquierda por A^{-1} tenemos:
$A\cdot A^{-1}\cdot X = A^{-1}\cdot C \;\rightarrow\; I_2\cdot X = A^{-1}\cdot C \;\rightarrow\; X = A^{-1}\cdot C$

$C = A^t + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Por tanto $\mathbf{X =} A^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$**.**

b)
Calcule la matriz A^{2000}.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; por tanto $A^{2000} = \begin{pmatrix} 1 & 2000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Correctamente tendríamos que usar el método de demostración de inducción.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) (1’75 puntos) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (0’75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
c) (0’5 puntos) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde f’(x) = 0? Razone la respuesta.

Solución

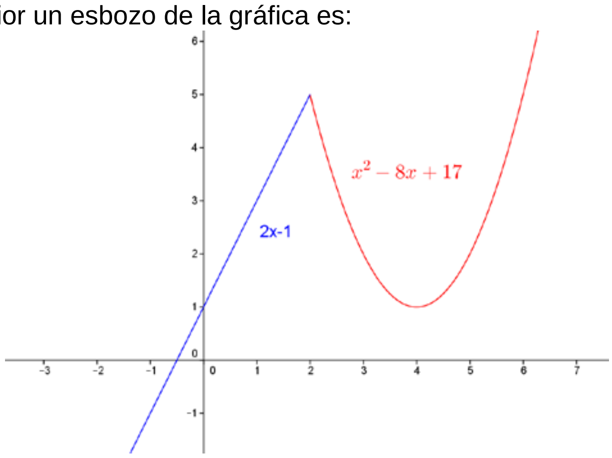
Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

a)
Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.

La gráfica de $2x + 1$ $(x < 2)$ es un segmento, por tanto con dos puntos es suficiente para dibujarlo, el $(2^-,5)$ y el $(0, 1)$.

La gráfica de $x^2 - 8x + 17$ $(x \ge 2)$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba (∪), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(x^2 - 8x + 17)' = 0 = 2x - 8$, de donde $x = 4$, luego vértice en $V(4,f(4)) = V(4,1)$. Los puntos de corte son $(0,17)$, *no está en su dominio*, y de $x^2 - 8x+17= 0$, tenemos $x = \dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 17}}{2} = \dfrac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$, que no tiene soluciones reales luego no corta al eje de las X. Le damos un par de valores, si es posible a izquierda y derecha del vértice, el (2,5) y el (5,2).

Teniendo en cuenta la anterior un esbozo de la gráfica es:



De la gráfica observamos **f(x) que es continua en R y derivable en R – {2},** no obstante vamos a verlo mejor analíticamente

Continuidad.

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

$2x + 1$ es continua y derivable en R, en particular en $x < 2$.
$x^2 - 8x + 17$ es continua y derivable en R, en particular en $x > 2$.

Veamos la continuidad en $x = 2$.
f(x) es continua en $x = 2$ si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + 1) = 4 + 1 = 5;$

$f(0) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 8x + 17) = 5$, por tanto **f(x)** es continua en $x = 2$, es decir **es continua en R**.

Derivabilidad

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-8x+17 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<2 \\ 2x-8 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Veamos la derivada en $x = 2$.
f(x) es derivable en $x = 2$ si $f'(2+) = f'(2-)$, es decir $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada)

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2) = 2$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - 8) = 4 - 8 = -4$, como $f'(2-) = 2 \ne f'(2+) = -4$, **f(x) no es derivable en x = 2**, es decir **es derivable en R – {2}**.

b)
Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

Observando la gráfica vemos que f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (2,4).

Por definición en x = 2 hay un máximo relativo que vale f(2) = 5.
Por definición en x = 4 hay un mínimo relativo que vale f(4) = 1.
c)
Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde f'(x) = 0? Razone la respuesta.

Observando la gráfica vemos que tiene **un máximo relativo en x = 2 y que vale f(2) = 5, y un mínimo relativo en el vértice de la parábola, es decir en el punto V(4,1).**
En el punto x = 2 hemos visto que a función no era derivable, por tanto no existe f'(2) y por supuesto f'(2) no vale cero. En el vértice V(4,1), vimos para calcularlo que f'(4) = 0.

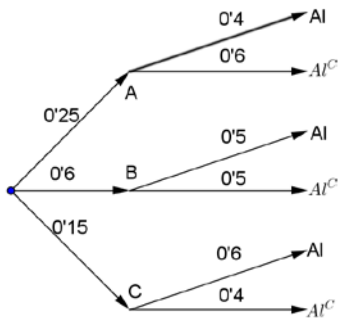
EJERCICIO 3_B
Parte I
Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A, B ó C, con probabilidades p(A) = 0'25, p(B) = 0'6 y p(C) = 0'15, respectivamente. La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0'4, si huye por la calle B es 0'5, y si huye por la calle C es 0'6.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.
b) (1 punto) Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la calle A?

Solución

Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A, B ó C, con probabilidades p(A) = 0'25, p(B) = 0'6 y p(C) = 0'15, respectivamente. La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0'4, si huye por la calle B es 0'5, y si huye por la calle C es 0'6.
a)
Calcule la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.

Llamemos A, B, C, Al y Al^C, a los sucesos siguientes, "huir por la calle A", "huir por la calle B", "huir por la calle C", "ser alcanzado" y "no ser alcanzado", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 0'25, p(B) = 0'6, p(C) = 0'15, p(Al/A) = 0'4, p(Al/B) = 0'5, p(Al/C) = 0'6, ..
Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(alcanzar al ladrón) = **p(Al) =** p(A)·p(Al/A) + p(B)·p(Al/B) + p(C)·p(Al/C) =
= (0'25)·(0'4) + (0'6)·(0'5) + (0'15)·(0'6) **= 49/100 = 0'49.**
b)
Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la calle A?

Aplicando la Fórmula de Bayes

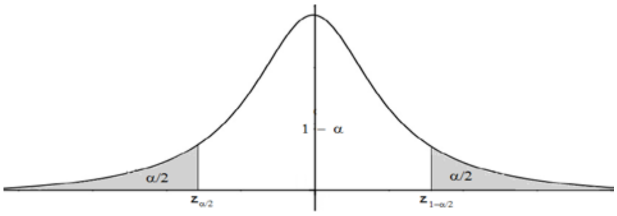
$$\mathbf{p(A/Al) =} \frac{p(A\cap Al)}{p(Al)} = \frac{p(A)\cdot p(P/A)}{p(P/A)} = \frac{(0'25)\cdot(0'4)}{0'49} \mathbf{= 10/49 \cong 0'2041.}$$

EJERCICIO 3_B
Parte II
Una máquina que envasa aceite en garrafas de 5 litros está ajustada de manera que la cantidad que llena sigue una ley normal con desviación típica σ = 0'15 litros.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media del contenido de las garrafas que llena esta máquina sabiendo que una muestra aleatoria de 36 de ellas dio un contenido medio de 4'97 litros.

b) (0'5 puntos) ¿Contienen las garrafas 5 litros de aceite?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

Una máquina que envasa aceite en garrafas de 5 litros está ajustada de manera que la cantidad que llena sigue una ley normal con desviación típica σ = 0'15 litros.

a)

Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media del contenido de las garrafas que llena esta máquina sabiendo que una muestra aleatoria de 36 de ellas dio un contenido medio de 4'97 litros.

Datos del problema: σ = 0'15; n = 36, $\overline{x}$ = 4'97, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4'97 - 1'96\cdot\frac{0'15}{\sqrt{36}}, 4'97 + 1'96\cdot\frac{0'15}{\sqrt{36}}\right) = \mathbf{(4'921,\ 5'019).}$$

b)

¿Contienen las garrafas 5 litros de aceite?

Como el 5 está en el intervalo **(4'921, 5'019)**, podemos decir que las garrafas contienen 5 litros de aceite, con un nivel de confianza del 95%.