OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1'5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} 2x + y + mz = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + my - 2z = -4 \end{array}$$

calcule, para m = +1, la inversa de la matriz de coeficientes.

b) (1'5 puntos) Resuelva, para m = -1, el sistema del apartado anterior.

Solución

a) (1'5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} 2x + y + mz = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + my - 2z = -4 \end{array}$$

calcule, para m = +1, la inversa de la matriz de coeficientes.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & m & -2 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Si m = 1, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y si det(A) = |A| $\neq$ o entonces existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - 2F_3 \\ F_2 - F_1 \\ \text{fila} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1\cdot(-3-5) = -8; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

luego $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (-1/8)\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (1/8)\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

b)

Resuelva, para m = -1, el sistema del apartado anterior.

Si m = - 1

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Lo resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_3 \\ \ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ \\ \ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ por tanto}$$

nuestro sistema es $\begin{cases} x-y-2z=-4 \\ 3y+3z=6 \end{cases}$, o $\begin{cases} x-y-2z=-4 \\ y+z=2 \end{cases}$, tomando z = $\lambda \in$ R tenemos y = 2 - λ y x = -4 + (2-λ) + 2(λ) = = -2 + λ, es decir **la solución es (x,y,z) = (-2 + λ,2 - λ,λ) con** $\lambda \in$ R, es decir es un sistema compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

EJERCICIO 2_A

El precio en Bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por la función C: [0,5] $\rightarrow$ R definida así: $C(t) = 100\cdot(t^2 - 6t + 25)$, donde t representa el tiempo medido en horas.

a) (1'5 puntos) Dibuje la gráfica de C, indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

c) (0'5 puntos) Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

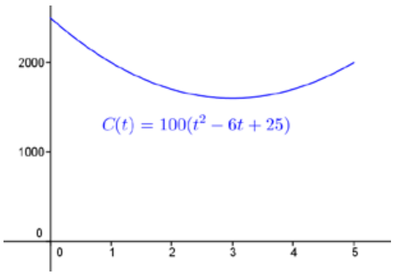
Solución

El precio en Bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por la función C: [0,5] $\rightarrow$ R definida así: $C(t) = 100\cdot(t^2 - 6t + 25)$, donde t representa el tiempo medido en horas.

a)

Dibuje la gráfica de C, indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.

La gráfica de $C(t) = 100\cdot(t^2 - 6t + 25)$ definida en [0,5], es un tozo de parábola con las ramas hacia arriba, ($\cup$) pues el nº que multiplica a t^2 es positivo, con abscisa del vértice en $C'(t) = 0 = 100\cdot(2t - 6)$, de donde t = 3 y vértice V(3,C(3)) = V(3,1600), y puntos (0,C(0)) = (0,2500) y (5,C(5)) = (0,2000); por tanto teniendo en cuenta la anterior un esbozo de la gráfica de C(t) es:



Como la gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba ($\cup$), sabemos que la función es estrictamente decreciente $(\searrow)$ hasta el vértice y estrictamente creciente $(\nearrow)$ a partir del vértice, en nuestro caso C(t) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0,3) y estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (3,5). **Por tanto el precio baja en (0,3) y sube en (3,5)**.

El precio inicial es C(0) = 2500 pts.

b)

¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

Como la función C(t) está definida en un intervalo cerrado [0,5] tenemos extremos absolutos, que se alcanzarán en los extremos del intervalo t = 0 y t = 5, o en la solución de C'(t) = 0, que era t = 3. Ya hemos calculado:

C(0) = 2500

C(3) = 1600

C(5) = 2000

Por tanto **el máximo absoluto es 2500 pts que se alcanza en el instante inicial, y el mínimo absoluto está en el vértice (3,1600) es decir es de 1600 pts y se alcanza a las 3 horas de iniciar**.

c)

Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

Como ya he indicado antes, la función es estrictamente creciente $(\nearrow)$ a partir del vértice (t = 3), luego **la tendencia del precio de las funciones es que suben de precio**, y **al cabo de 8 horas el precio es**:

C(8) = $C(t) = 100\cdot((8)^2 - 6(8) + 25)$ **= 4100 pts**.

EJERCICIO 3_A

Parte I

En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a) (1 punto) Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.

b) (1 punto) Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas si éstas las contesta al azar.

Solución

En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a)

Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.

Llamemos A_i y A_i^C, a los sucesos siguientes, "acertar la pregunta nº "i" " y "no acertar a una pregunta nº "i" ", respectivamente. Observamos que la probabilidad de acertar una pregunta no influye en la siguiente pues todas las preguntas tienen una probabilidad de $p(A_i) = 1/4$ si se responden al azar.

Piden $p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)\cdot p(A_4)\cdot p(A_5)\cdot p(A_6)\cdot p(A_7)\cdot p(A_8)\cdot p(A_9)\cdot p(A_{10})\cdot p(A_{11})\cdot p(A_{12})\cdot p(A_{13})\cdot p(A_{14})\cdot p(A_{14}) =$
$= (1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4) = \mathbf{1/4^{15}} \cong \mathbf{9'3132\cdot 10^{-10}}$.

b)
Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas si éstas las contesta al azar.

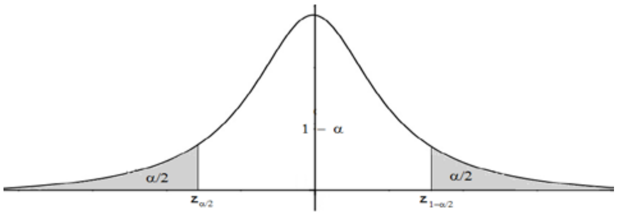
Piden $p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)\cdot p(A_4)\cdot p(A_5)\cdot p(A_6)\cdot p(A_7)\cdot p(A_8)\cdot p(A_9)\cdot p(A_{10})\cdot p(A_{11})\cdot p(A_{12})\cdot p(A_{13})\cdot p(A_{14})\cdot p(A_{14}) =$
$= (1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4)\cdot(1/4) = \mathbf{1/4^{10}} \cong \mathbf{9'5367\cdot 10^{-7}}$.

EJERCICIO 3_A

Parte II
La duración de los matrimonios en un país se distribuye según una ley normal con desviación típica 4'8 años.
a) (1 punto) Si se toma una muestra de 64 matrimonios cuya media es 16 años, halle un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.
b) (1 punto) Si sabemos que la media poblacional es 15, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 100 sea superior a 16'35 años?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x} = (a + b)/2$, el <u>error máximo</u> de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b – a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b – a)/2$, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

La duración de los matrimonios en un país se distribuye según una ley normal con desviación típica 4'8 años.
a)
Si se toma una muestra de 64 matrimonios cuya media es 16 años, halle un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 4'8$; $n = 64$, $\overline{x} = 16$, , nivel de confianza = 95% = 0'95 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'05$, es decir $\alpha/2 = 0'05/2 = 0'025$.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu)=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(16-1'96\cdot\frac{4'8}{\sqrt{64}},16+1'96\cdot\frac{4'8}{\sqrt{64}}\right)$$ **= (14’824, 17’176).**

b)
Si sabemos que la media poblacional es 15, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 100 sea superior a 16’35 años?

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu\,;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(15\,;\ \frac{4'8}{\sqrt{100}})$ **= N(15;0’48).**

Me están pidiendo la probabilidad “p($\overline{X} \geq 16'35$)”

Luego p($\overline{X} \geq$ 16’35) = {tipificamos} = $p(Z \geq \frac{16'35 - 15}{0'48}) = p(Z \geq 2'81) = 1 - p(Z \leq 2'81))$ = {Mirando en la tabla} = 1 – 0’9975 **= 0’0025**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Sea el recinto definido por las inecuaciones: $2y \geq x + 3$; $-y \geq -x$; $x \leq 5$
a) (1 punto) Represéntelo gráficamente.
b) (1 punto) Calcule sus vértices.
c) (1 punto) ¿En qué puntos del recinto alcanza la función F(x, y) = -2x + y -1 sus valores extremos?

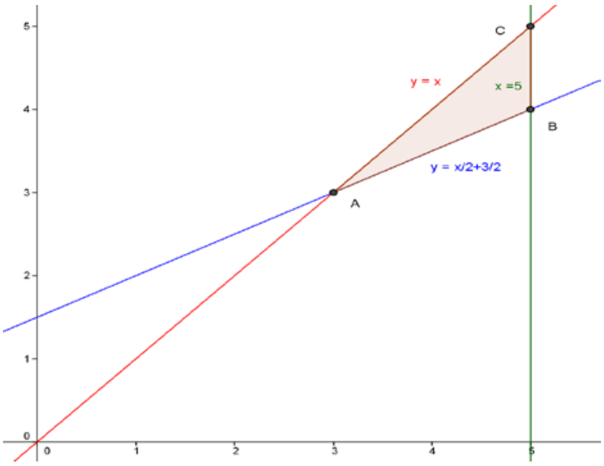
Solución

a) b) y c)
Sea el recinto definido por las inecuaciones: $2y \geq x + 3$; $-y \geq -x$; $x \leq 5$. Represéntelo gráficamente. Calcule sus vértices. ¿En qué puntos del recinto alcanza la función F(x, y) = -2x + y -1 sus valores extremos?

Función Objetivo F(x,y) = -2x + y - 1.

Las desigualdades $2y \geq x + 3$; $-y \geq -x$; $x \leq 5$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $2y = x + 3$; $-y = -x$; $x = 5$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
$y = x/2 + 3/2$; $y = x$; $x = 5$.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = x e y = x/2+3/2, tenemos x = x/2+3/2, luego 2x = x+3, x = y = 3, y el punto de corte es A(3,3)
De y = x/2+3/2 y x = 5, tenemos y = (5)/2+3/2 = 4, y el punto de corte es B(5,4)
De y = x y x = 5, tenemos y = 5, y el punto de corte es C(5,5).

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: A(3,3), B(5,4) y C(5,5).

Calculemos el máximo y el mínimo de la función F(x,y) = -2x + y – 1 en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(3,3), B(5,4) y C(5,5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(3,3) = -2(3) + (3) - 1 **= -4**; **F(5,4)** = -2(5) + (4) - 1 **= -7**; F(5,5) = -2(5) + (5) - 1 = -6; .

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es - 4** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(3,3) y el mínimo absoluto de la función F en la región es - 7** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(5,4).**

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Represéntela gráficamente.
c) (1 punto) Halle sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

a)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable. Observando su gráfica vemos que no es continua en x = 2, por tanto tampoco es derivable en x = 2.

$x^2/2$ es continua y derivable en R, en particular en x < 2.
-x + 4 es continua y derivable en R, en particular en 2 < x < 4.
$(x – 4)^2$ es continua y derivable en R, en particular en x > 4.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 2 y x = 4.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2/2) = 4/2 = 2$;

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x + 4) = -(2) + 4 = 2$, como son iguales **f(x) es continua en x = 2**.

f(x) es continua en x = 4 si $f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (-x + 4) = -(4) + 4 = 0$;

$f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x – 4)^2 = (4 – 4)^2 = 0$, por tanto **f(x) es continua en x = 4**.

Recapitulando **f es continua en R.**

$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$; tenemos $f'(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 2\cdot(x-4) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

Veamos si f es derivable en x = 2

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (x) = 2$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (-1) = -1$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 2.**

Veamos si f es derivable en x = 4

f(x) es derivable en x = 4 si $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} (-1) = -1$; $\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} 2\cdot(x - 4) = 0$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es**

derivable en x = 4. Luego $f'(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 2\cdot(x-4) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$.

Recapitulando **f es derivable en R – {2,4}.**

b)

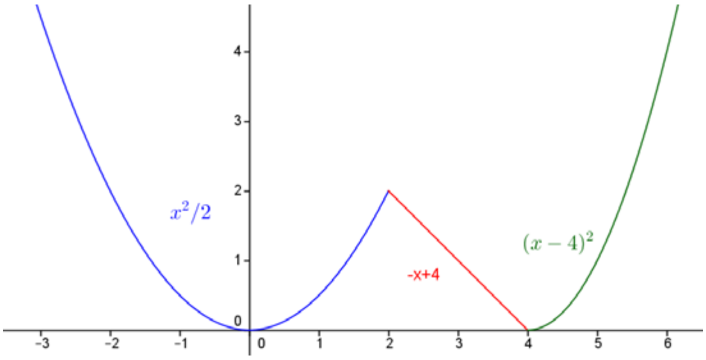
Represéntela gráficamente.

La gráfica de $x^2/2$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = x, de donde x = 0 y V(0,f(0)) = (0,0), y pasa por los puntos $(2^+,2)$ y (-1,1/2).

La gráfica de -x + 4 es una segmento que no pasa por el origen, con pendiente negativa y pasa por los puntos (2,2) y (4,0).

La gráfica de $(x – 4)^2$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = 2·(x-4), de donde x = 4 y V(4,f(4)) = (4,0), y pasa por los puntos (5,f(5)) = (5,1) y (6,f(6)) = (6,4).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



c)

Halle sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Observando la gráfica vemos que f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,0)\cup(2,4)$, y que f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(0,2))\cup(4,+\infty)$.

EJERCICIO 3_B

Parte I

El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige al azar un alumno:

a) (1 punto) Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

Solución

El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige al azar un alumno:

a)

Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.

Llamamos A y B a los sucesos “aficionados al fútbol” y “aficionados al cine”.

Del problema tenemos: p(A) = 80% = 0’8, p(B) = 60% = 0’6, p(las dos cosas) = $p(A\cap B)$ = 50% = 0’50

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A^C) = 1 – p(A)$

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(ninguna de las dos)** = p(ni y niB) = $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0’8 + 0’6 – 0’5 = 0’9, tenemos $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$= $1 - p(A\cup B)$ =1-0’9 **= 0’1.**

b)

¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

Me piden **$p(B/A^C)$** = $\frac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0'6 - 0'5}{1 - 0'8}$ **= 1/2 = 0’5.**

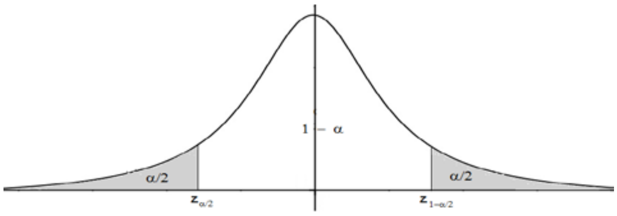
EJERCICIO 3_B

Parte II

En una muestra aleatoria de 225 individuos se ha obtenido una media de edad de 16’5 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 0’7 años.
a) (1’5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la edad media de la población.
b) (0’5 puntos) ¿Qué error se comete en la estimación anterior?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

En una muestra aleatoria de 225 individuos se ha obtenido una media de edad de 16’5 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 0’7 años.
a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la edad media de la población.

Datos del problema: n = 225, $\overline{x}$ = 16’5, σ = 0’7, nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde α = 0’05, es decir α/2 = 0’05/2 = 0’025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(16'5 - 1'96 \cdot \frac{0'7}{\sqrt{225}}, 16'5 + 1'96 \cdot \frac{0'7}{\sqrt{225}}\right) \cong \mathbf{(16'4085, 16'5915)}.$$

b)
¿Qué error se comete en la estimación anterior?

Datos del problema: n = 225; σ = 0’7, $z_{1-\alpha/2} = 1'96$.

Tenemos **Error** = $E \le z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{0'7}{\sqrt{225}} \cong$ **0’091467**.