OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los 3 semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$x/10 + y/8 \le 1; \quad x/5 + y/8 \ge 1; \quad x/10 + y/4 \ge 1$$

a) (2 puntos) Dibuje dicha región y determine sus vértices.
b) (1 punto) Calcule el mínimo de la función objetivo F(x,y) = 4x + 5y en el recinto anterior.

Solución

a) y b)
La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los 3 semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones: $x/10 + y/8 \le 1$; $x/5 + y/8 \ge 1$; $x/10 + y/4 \ge 1$. Dibuje dicha región y determine sus vértices. Calcule el mínimo de la función objetivo F(x,y) = 4x + 5y en el recinto anterior.

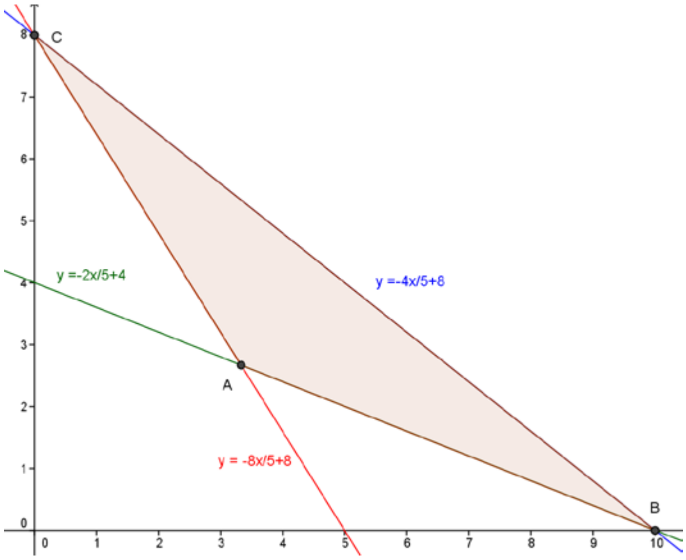
Función Objetivo F(x,y) = 4x + 5y.

Las desigualdades $x/10 + y/8 \le 1$; $x/5 + y/8 \ge 1$; $x/10 + y/4 \ge 1$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x/10 + y/8 = 1$; $x/5 + y/8 = 1$; $x/10 + y/4 = 1$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -8x/10 + 8 = -4x/5 + 8; \quad y = -8x/5 + 8; \quad y = -4x/10 + 4 = -2x/5 + 4.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = -2x/5+4 e y = -8x/5+8, tenemos -2x/5+4 = -8x/5+8, luego -2x+20 = -8x+40, es decir 6x = 20, de donde x = 20/6 = 10/3 e y = -2(10/3)/5+4 = 8/3, y el punto de corte es A(10/3,8/3)
De y = -2x/5+4 e y = -4x/5+8, tenemos -2x/5+4 = -4x/5+8, luego -2x+20 = -4x+40, es decir 2x = 20, de donde x = 20/2 = 10 e y = -2(10)/5+4 = 0, y el punto de corte es B(10,0)
De y = -4x/5+8 e y = -8x/5+8, tenemos -4x/5+8 = -8x/5+8, luego -4x+40 = -8x+40, es decir 4x = 0, de donde x = 0 e y = -4(0)/5+8 = 8, y el punto de corte es C(0,8).

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: A(10/3,8/3), B(10,0) y C(0,8).

Calculemos el máximo y el mínimo de la función F(x,y) = 4x + 5y en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(10/3,8/3), B(10,0) y C(0,8). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(3,3) = 4(10/3) + 5(8/3) **= 80/3 ≅ 26'667**; F(10,0) = 4(10) + 5(0) = 40; F(0,8) = 4(0) + 5(8) = 40.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es 80/3** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(10/3,8/3).**

EJERCICIO 2_A

a) (1 punto) Calcule la derivada de cada una de las funciones: $g(x) = -1/x$ y $h(x) = x\cdot sen(x)$

b) (2 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos (-1,0) y (0,1).

Solución

a)

Calcule la derivada de cada una de las funciones: $g(x) = -1/x$ y $h(x) = x\cdot sen(x)$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

$((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(sen(x))' = \cos(x)$; $(k)' = 0$.

$g(x) = \dfrac{-1}{x} = -x^{-1}$; $f'(x) = (-1)(-1)\cdot x^{-1-1} = 1\cdot x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$;

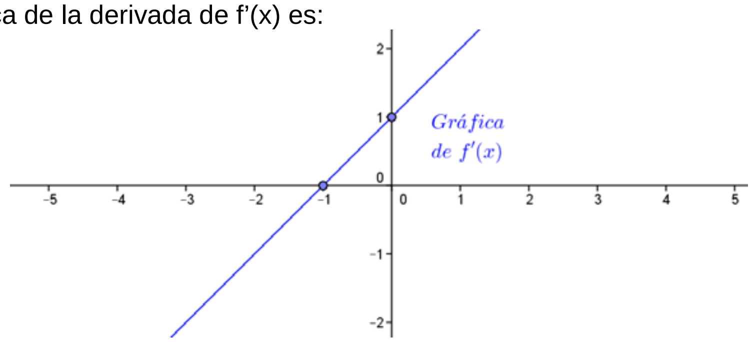
$h(x) = x\cdot sen(x)$; $h'(x) = sen(x) + x\cdot\cos(x)$.

b)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos (-1,0) y (0,1).

La gráfica de la función derivada $f'(x)$, nos dicen que es una recta que pasa por los puntos (-1,0) y (0,1).

Un esbozo de la gráfica de la derivada de $f'(x)$ es:



Como $f'(x) < 0$ en $(-\infty,-1)$, por tanto f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,-1)$.

Como $f'(x) > 0$ en $(-1,+\infty)$, por tanto f(x) es estrictamente decreciente $(\nearrow)$ en $(-1,+\infty)$.

Por definición en x = -1 hay un mínimo relativo

EJERCICIO 3_A

Parte I

En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A, B y C y dos idiomas excluyentes, Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%. También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?

b) (1 punto) Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

Solución

En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A, B y C y dos idiomas excluyentes, Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%. También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

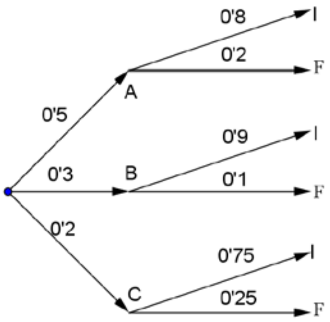
a)

¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?

Sean A, B, C las modalidades, I y F, los sucesos siguientes, “Inglés” y “Francés”.

Datos del problema p(A) = 50% = 0'5, p(B) = 30% = 0'3, p(C) = 20% = 0'2, p(I/A) = 80% = 0'8, p(I/B) = 90% = = 0'9, p(I/C) = 75% = 0'75, ..

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total

p(elegir Francés) = **p(F) =** p(A)·p(F/A) + p(B)·p(F/B) + p(C)·p(F/C) =

= (0'5)·(0'2) + (0'3)·(0'1) + (0'2)·(0'25) **= 9/50 = 0'18.**

b)

Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

Aplicando la Fórmula de Bayes

p(A/F) = $\frac{p(A\cap F)}{p(F)} = \frac{p(A)\cdot p(F/A)}{p(F)} = \frac{(0'5)\cdot(0'2)}{0'18}$ **= 5/9 ≅ 0'5556.**

EJERCICIO 3_A

Parte II

La altura de los jóvenes andaluces se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2.

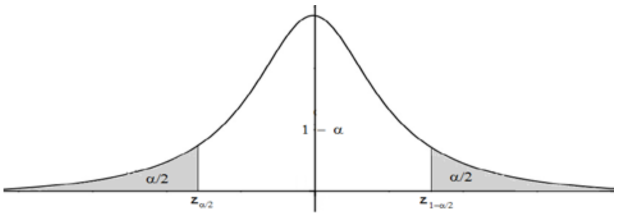
Se ha seleccionado una muestra aleatoria y con una confianza del 95% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de 2'45 cm.

a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

b) (1 punto) Determine el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la *<u>media</u>* *es* $\overline{x}$ *= (a + b)/2, el* *<u>error máximo</u>* *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el* *<u>tamaño mínimo</u>* *de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

La altura de los jóvenes andaluces se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2.
Se ha seleccionado una muestra aleatoria y con una confianza del 95% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de 2'45 cm.
a)
¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

Datos del problema: $\sigma^2 = 25 \rightarrow \sigma = 5$; amplitud = b – a = 2'45, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$.

De $b – a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, tenemos $n \ge \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{b - a}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 1'96\cdot 5}{2'45}\right)^2 = 64$, luego **n = 64.**

b)
Determine el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm.

Datos del problema: $\sigma = 5$; n = 64, $\bar{x} = 170$, $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, E = (b-a)/2 = 2'45/2 = 1'225; por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu)=\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bar{x} - E,\bar{x} + E\right) =$$

$$= \left(170 - 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{64}},170 + 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{64}}\right) = \left(170 - 1'225,170 + 1'225\right) = \mathbf{(168'775,\ 171'225).}$$

Luego el límite inferior del intervalo es a = 168'775 y el límite superior del intervalo es b = 171'225.

OPCION B

EJERCICIO 1_B

Se considera el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right.$

a) (2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en función del número de soluciones.
b) (1 punto) Determine si es posible, o no, eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulte sea equivalente al anterior. Razone la respuesta.

Solución

Se considera el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right.$

a)
Resuélvalo y clasifíquelo en función del número de soluciones.

Lo resolvemos por el método de Gauss, poniendo su matriz asociada.

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 1 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 12 & -6 & -42 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ F_2/6 \\ F_3/4 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, por tanto

nuestro sistema asociado es $\left\{\begin{array}{l} x-9y+5z=33 \\ 2y-z=-7 \end{array}\right.$, tomando $y = \lambda \in R$ tenemos $z = 7 + 2\lambda$ y $x =33+9\lambda-5(7+2\lambda) =$
$= -2 - \lambda$, es decir **la solución es $(x,y,z) = (-2 - \lambda,\lambda,7 + 2\lambda)$ con** $\lambda \in R$, es decir es un sistema compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.
b)
Determine si es posible, o no, eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulte sea equivalente al anterior. Razone la respuesta.

Hemos visto al resolver el sistema por Gauss que se pòdía eliminar la tercera ecuación, porque era combinación lineal de la primera y la segunda, y hemos obtenido un sistema equivalente al original.

EJERCICIO 2_B

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \le 1 \\ L(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (L indica logaritmo neperiano)

a) (1 punto) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = -1.
b) (1 punto) Represente gráficamente la función anterior si a = 3.
c) (1 punto) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos x = -1 y x = 1 para la función obtenida en el apartado anterior.

Solución

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \le 1 \\ L(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (L indica logaritmo neperiano)

a)
Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = -1.

Sabemos que f(x) es continua en x = -1 si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.

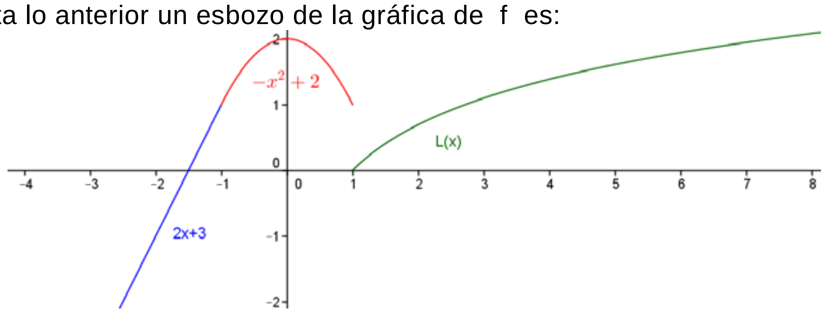
$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x + a) = 2(-1) + a = -2 + a$;

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x^2 + 2) = -(-1)^2 + 2 = -1 + 2 = 1$, como son iguales -2 + a = 1, **de donde a = 3**.

b)
Represente gráficamente la función anterior si a = 3. (Hemos visto que para a = 3, f es continua en x = -1).

$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \le 1. \\ L(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La gráfica de 2x + 3 es una semirrecta que no pasa por el origen, con pendiente positiva y pasa por los puntos (-1,1) y (0,3).
La gráfica de $-x^2 + 2$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo $\cap$ (el nº que multiplica a x^2 es negativo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = -2x, de donde x = 0 y V(0,f(0)) = (0,2), y pasa por los puntos (-1,1) y (1,1).
La gráfica de L(x) es un trozo de de la función logarítmica, que tiene una asíntota vertical en $x = 0^+$ pues $\lim_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$ (que no estás en su dominio), corte en OX en (1,0), porque L(1) = 0, y además sabemos que siempre es estrictamente creciente, con $\lim_{x\to +\infty} L(x) = +\infty$.
Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



c)
Justifique la existencia o no de derivada en los puntos x = -1 y x = 1 para la función obtenida en el apartado anterior.

Observando la gráfica parece que es derivable en x = -1, ahora lo veremos; pero al no ser continua en x = 1 no es derivable en x = 1
Veámoslo analíticamente.

$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \le 1. \\ L(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1. \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Veamos si f es derivable en x = -1, ya vimos que era continua en x = 1 para a = 3.
f(x) es derivable en x = -1 si $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} (2) = 2$; $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} (-2x) = -2(-1) = 2$; como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = -1.**

Veamos la continuidad de f en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 2) = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} L(x) = L(1) = 0$, como no son iguales **f(x) no es continua en x = 1, por tanto tampoco es derivable en x = 1.**

EJERCICIO 3_B

Parte I
Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que p(A) = 0’7, p(B) = 0’6 y p(A∪B) = 0’9.
a) (1 punto) Justifique si A y B son independientes.
b) (1 punto) Calcule $p(A/B^C)$ y $p(B/A^C)$; A^C y B^C indican los contrarios de A y B.

Solución

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que p(A) = 0’7, p(B) = 0’6 y p(A∪B) = 0’9.
a)
Justifique si A y B son independientes.

Del problema tenemos: p(A) = 0’7, p(B) = 0’6 y p(A∪B) = 0’9
Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B); $p(A^C) = 1 – p(A)$
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B); $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **ver si A y B son independientes es decir si p(A∩B) = p(A)·p(B)**
De p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B), tenemos 0’9 = 0’7 + 0’6 – p(A∩B), de donde p(A∩B) = 0’4.
Como p(A∩B) = 0’4 ≠ (0’7)·(0’6) = **0’42 = p(A)·p(B), A y B no son independientes.**
b)
Calcule $p(A/B^C)$ y $p(B/A^C)$; A^C y B^C indican los contrarios de A y B.
Me piden $\mathbf{p(A/B^C)} = \dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A\cap B)}{1 - p(B)} = \dfrac{0'7 - 0'4}{1 - 0'6}$ **= 3/4 = 0’75.**

Me piden $\mathbf{p(B/A^C)} = \dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p(A\cap B)}{1 - p(A)} = \dfrac{0'6 - 0'4}{1 - 0'7}$ **= 2/3 ≅ 0’6667.**

EJERCICIO 3_B

Parte II
Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 8’1 días y desviación típica 9 días. Se elige, al azar, una muestra de 100 enfermos:
a) (1 punto) Razone cuál es la distribución de la media muestral.
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 8 y 10 días?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 8'1 días y desviación típica 9 días. Se elige, al azar, una muestra de 100 enfermos:
a)
Razone cuál es la distribución de la media muestral.

Datos del problema: Distribución de la población $\rightarrow$ N(μ;σ) = N(8'1; 9); **μ = 8'1**; **σ = 9**; n = 100.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu\,;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(8'1;\ \frac{9}{\sqrt{100}})$ **= N(8'1;0'9).**

b)
¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 8 y 10 días?

Me están pidiendo la probabilidad "p($8 \le \overline{X} \le 10$)"

Luego p($8 \le \overline{X} \le 10$) = {tipificamos} = $p(\frac{8 - 8'1}{0'9} \le Z \le \frac{10 - 8'1}{0'9}) \cong$ = p(-0'11 ≤ Z ≤ 2'11) =
= p(Z ≤ 2'11) - p(Z ≤ -0'11) = p(Z ≤ 2'11) – (1 - p(Z ≤ 0'11)) = {Mirando en la tabla} =
= 0'9826 – (1- 0'5438) **= 0'5264**.