OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2 puntos) Represente y calcule los vértices de la región determinada por las inecuaciones siguientes:

$x \geq 0$; $y \geq 0$; $y - x \leq 2$; $y - x \geq -1$; $2y + x \leq 7$.

b) (1 punto) Calcule el valor máximo de la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en la región anterior y el punto donde lo alcanza.

Solución

a) y b)

Represente y calcule los vértices de la región determinada por las inecuaciones siguientes:
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $y - x \leq 2$; $y - x \geq -1$; $2y + x \leq 7$. Calcule el valor máximo de la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en la región anterior y el punto donde lo alcanza.

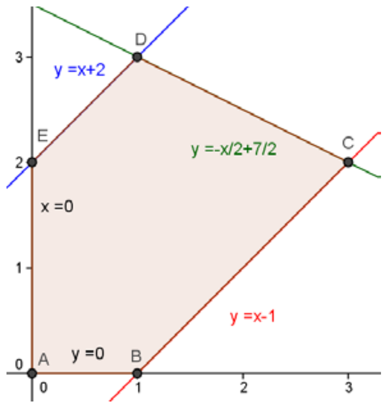
Función Objetivo $F(x,y) = 2x + 3y$.

Las desigualdades $x \geq 0$; $y \geq 0$; $y - x \leq 2$; $y - x \geq -1$; $2y + x \leq 7$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x = 0$; $y = 0$; $y - x = 2$; $y - x = -1$; $2y + x = 7$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$x = 0$; $y = 0$; $y = x + 2$; $y = x - 1$; $y = -x/2 + 7/2$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $y = 0$ e $y = x-1$, tenemos $0 = x-1$, luego $x = 1$, y el punto de corte es B(1,0)
De $y = x-1$ e $y = -x/2+7/2$, tenemos $x-1 = -x/2+7/2$, luego $2x-2 = -x+7$, por tanto $3x = 9$, es decir $x = 3$ e $y = 2$, y el punto de corte es C(3,2).
De $y = -x/2+7/2$ e $y = x+2$, tenemos $-x/2+7/2 = x+2$, luego $-x+7 = 2x+4$, por tanto $3 = 3x$, es decir $x = 1$ e $y = 3$, y el punto de corte es D(1,3).
De $x = 0$ e $y = x+2$, tenemos $y = 2$, y el punto de corte es E(0,2)

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(1,0), C(3,2), D(1,3) y E(0,2).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(1,0), C(3,2), D(1,3) y E(0,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(0,0) = 2(0) + 3(0) = 0$; $F(1,0) = 2(1) + 3(0) = 2$; $\mathbf{F(3,2) =} 2(3) + 3(2) \mathbf{= 12}$;
$F(1,3) = 2(1) + 3(3) = 11$; $F(0, 2) = 2(0) + 3(2) = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 12** (el mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(3,2).**

EJERCICIO 2_A

Se considera la siguiente función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 - 2x + a & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 0 \le x \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a, ¿es f derivable?
b) (1'5 puntos) Para el caso de a = 2, dibuje la gráfica de f.

Solución

Se considera la siguiente función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 - 2x + a & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 0 \le x \end{cases}$

a)
Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a, ¿es f derivable?

La función -2/(x+1) es continua y derivable en todo R - {-1} (nº que anula el denominador, en particular en x < -2.
La función $-x^2 - 2x + a$ es continua y derivable en todo R, en particular en -2 < x < 0.
La función 2/(x+1) es continua y derivable en todo R - {-1} (nº que anula el denominador, en particular en x > 0.

Veamos el valor de "a" para que f sea continua.
Sabemos que f es continua en x = -2 si $f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$.
$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -2/(x+1) = -2/(-2+1) = 2$; $f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (-x^2 - 2x + a) = -(-2)^2 - 2(-2) + a = 0 + a$, como tiene que ser iguales 2 = 0 + a, de donde **a = 2 para que f(x) sea continua en x = -2.**

Sabemos que f es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2 - 2x + a) = -(0)^2 - 2(0) + a = a$; $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2/(x+1) = 2/(0+1) = 2$, como tiene que ser iguales a = 2, de donde **a = 2 para que f(x) sea continua en x = 0.**

Por tanto para a = 2 f es continua en R.

Veamos la derivabilidad en x = -2 y x = 0, para el valor a = 2.

$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 0 \le x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < -2 \\ -2x - 2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 0 \le x \end{cases}$

f(x) es derivable en x = -2 si $\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -2^-} 2/(x+1)^2 = 2/(-2+1)^2 = 2$; $\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} (-2x-2) = -2(-2) - 2 = 2$; como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = -2.**

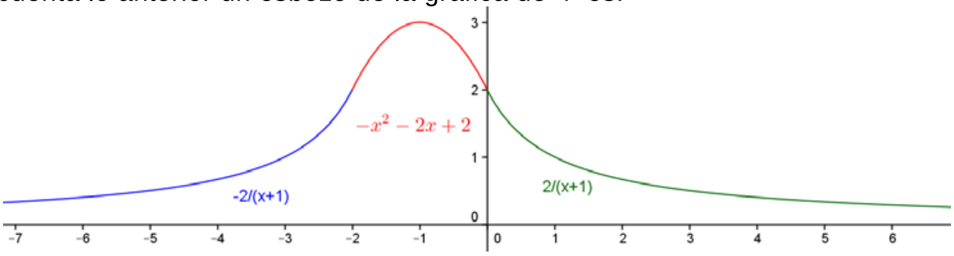
f(x) es derivable en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x-2) = -2(0) - 2 = -2$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -2/(x+1)^2 = -2/(0+1)^2 = -2$; como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = 0, luego f es derivable en R.**

b)
Para el caso de a = 2, dibuje la gráfica de f.

La gráfica de -2/(x+1) es un trozo hipérbola, que tiene una asíntota vertical en x = -1 (no está en su

dominio) porque $\lim_{x\to -1^-} -2/(x+1) = -2/(-1^- +1) = -2/0^- = +\infty$, y una asíntota horizontal en y = 0 en $+\infty$, porque $\lim_{x\to -\infty} -2/(x+1) = -2/(-\infty) = 0^+$, y f está por encima de la asíntota. Además $f(-2^-) = -2/(-2^-+1) = 2$, es decir pasa (no toca) por el punto $(-2^-,2)$ y siempre es estrictamente creciente porque viene de la asíntota y = 0 en $-\infty$ hasta la ordenada y = 2 en $x = -2^-$.
La gráfica de $-x^2 - 2x + 2$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo ∩ (el nº que multiplica a x^2 es negativo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = -2x-2, de donde x = -1 y V(-1,f(-1)) = = (-1,3), y pasa por los puntos (-2,2) y $(0^-,2)$.
La gráfica de 2/(x+1) es un trozo hipérbola, que tiene una asíntota vertical en x = -1 (no está en su dominio) porque $\lim_{x\to -1^-} -2/(x+1) = -2/(-1^- +1) = -2/0^- = +\infty$, y una asíntota horizontal en y = 0 en $+\infty$, porque $\lim_{x\to +\infty} 2/(x+1) = 2/(+\infty) = 0^+$, y f está por encima de la asíntota. Además f(0) = 2/(0+1) = 2, es decir pasa por el punto (0,2) y siempre es estrictamente decreciente porque va de la ordenada y = 2 en x = 0, hasta la asíntota y = 0 en $+\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:

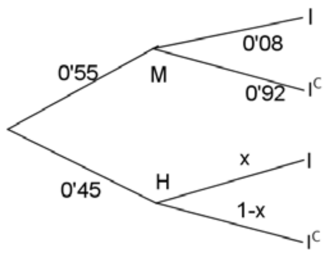


EJERCICIO 3_A
Parte I
(2 puntos) La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0'3. Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

Solución

La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0'3. Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

Llamamos M, H, I y I^C, a los sucesos "ser mujer", "ser hombre", "comprar por internet" y "no comprar por internet".
Del problema tenemos p(M) = 55% = 0'55, p(I/M) = 8% = 0'08, p(I) = 0'3,..
Todo esto lo vemos mejor en un diagrama de árbol (recordamos que las probabilidades que salen desde un mismo nodo suman 1)



Por el Teorema de la Probabilidad Total
p(compran por internet) = p(I) = 0'3 = p(M)·p(I/M) + p(H)·p(I/H) = (0'55)·(0'08) + (0'45)·(x) = 0'3.

Me piden p(compre por internet siendo hombre) = p(I/H) = x.
Despejando de (0'55)·(0'08)+(0'45)·(x) = 0'3, tenemos 0'044 + 0'45x = 0'3, luego **x** = 0'256/0'45 **= 128/225 ≅ ≅ 0'5689.**

EJERCICIO 3_A
Parte 2
Las notas de un examen se distribuyen según una ley normal de media 5'6 y varianza 9.
Seleccionamos al azar 16 estudiantes y calculamos la media de sus notas.

a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que dicha media esté comprendida entre 4'7 y 6'5.
b) (0'5 puntos) Si en lugar de seleccionar 16 estudiantes, seleccionamos 25, ¿aumentará o disminuirá la probabilidad calculada en el apartado anterior? Razone la respuesta.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Las notas de un examen se distribuyen según una ley normal de media 5'6 y varianza 9.
Seleccionamos al azar 16 estudiantes y calculamos la media de sus notas.

a)
Calcule la probabilidad de que dicha media esté comprendida entre 4'7 y 6'5.

Datos del problema: Distribución de la población → N(μ;σ) = N(5'6; $\sqrt{9}$) = N(5'6;3) ; **μ = 5'6**; $\boldsymbol{\sigma^2 = 9}$; **σ = 3;** n = 16.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(5'6; \frac{3}{\sqrt{16}})$ **= N(5'6;0'75).**

Me están pidiendo la probabilidad "$p(4'7 \le \overline{X} \le 6'5)$"

Luego $\boldsymbol{p(4'7 \le \overline{X} \le 6'5)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{4'7 - 5'6}{0'75} \le Z \le \frac{6'5 - 5'6}{0'75}) \cong = p(-1'2 \le Z \le 1'2) =$

$= p(Z \le 1'2) - p(Z \le -1'2) = p(Z \le 1'2) - (1 - p(Z \le 1'2)) = 2\cdot p(Z \le 1'2) - 1 =$ {Mirando en la tabla} =
= 2·0'8849 - 1**= 0'7698**.

b)
Si en lugar de seleccionar 16 estudiantes, seleccionamos 25, ¿aumentará o disminuirá la probabilidad calculada en el apartado anterior? Razone la respuesta.

Si aumenta el tamaño de la muestra, disminuye la desviación típica de la distribución muestral de medias, por tanto al dividir por un número menor aumenta el cociente del valor de Z y por tanto la probabilidad es mayor. Veámoslo analíticamente:

Datos del problema: Distribución de la población → N(μ;σ) = N(5'6; $\sqrt{9}$) = N(5'6;3) ; **μ = 5'6**; $\boldsymbol{\sigma^2 = 9}$; **σ = 3;** n = 25.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(5'6; \frac{3}{\sqrt{25}})$ **= N(5'6;0'6).**

Me están pidiendo la probabilidad "$p(4'7 \le \overline{X} \le 6'5)$"

Luego $\boldsymbol{p(4'7 \le \overline{X} \le 6'5)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{4'7 - 5'6}{0'6} \le Z \le \frac{6'5 - 5'6}{0'6}) \cong = p(-1'5 \le Z \le 1'5) =$

$= p(Z \le 1'5) - p(Z \le -1'5) = p(Z \le 1'5) - (1 - p(Z \le 1'5)) = 2\cdot p(Z \le 1'5) - 1 =$ {Mirando en la tabla} =
= 2·0'9332 - 1**= 0'8664**.

OPCION B

EJERCICIO 1_B

a) (1'5 puntos) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema: "Una empresa de repostería tiene 10 vehículos entre motocicletas (2 ruedas), turismos (4 ruedas) y pequeños camiones de reparto (6 ruedas). El impuesto municipal, por vehículo, es de 2000 pts, 5000 pts y 8000 pts, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 41000 pts por este concepto y que el total de ruedas de sus vehículos es de 34, ¿cuántos vehículos tiene de cada tipo?"

b) (1'5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, halle $A + A^{-1}$.

Solución

a)
Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema: "Una empresa de repostería tiene 10 vehículos entre motocicletas (2 ruedas), turismos (4 ruedas) y pequeños

camiones de reparto (6 ruedas). El impuesto municipal, por vehículo, es de 2000 pts, 5000 pts y 8000 pts, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 41000 pts por este concepto y que el total de ruedas de sus vehículos es de 34, ¿cuántos vehículos tiene de cada tipo?"

x = Número de motocicletas (2 ruedas).
y = Número de turismos (4 ruedas).
z = Número de pequeños camiones (6 ruedas).

De "Una empresa de repostería tiene 10 vehículos" $\rightarrow$ x + y + z = 10.
De "El impuesto municipal, por vehículo, es de 2000 pts, 5000 pts y 8000 pts, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 41000 pts" $\rightarrow$ 2000x + 5000y + 8000z = 41000.
De "el total de ruedas de sus vehículos es de 34" $\rightarrow$ 2x + 4y + 6z = 34.

El sistema pedido es: $\begin{cases} x+y+z = 10 \\ 2000x+5000y+8000z = 41000 \\ 2x+4y+6z = 34 \end{cases}$ o $\begin{cases} x+y+z = 10 \\ 2x+5y+8z = 41 \\ x+2y+3z = 17 \end{cases}$

b)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, halle $A + A^{-1}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$, existe su matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) =} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{A + A^{-1} =} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión: $f(t) = 5t/2 - t^2/2$.
a) (1 punto) Represente gráficamente f.
b) (1 punto) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?
c) (1 punto) ¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

Solución

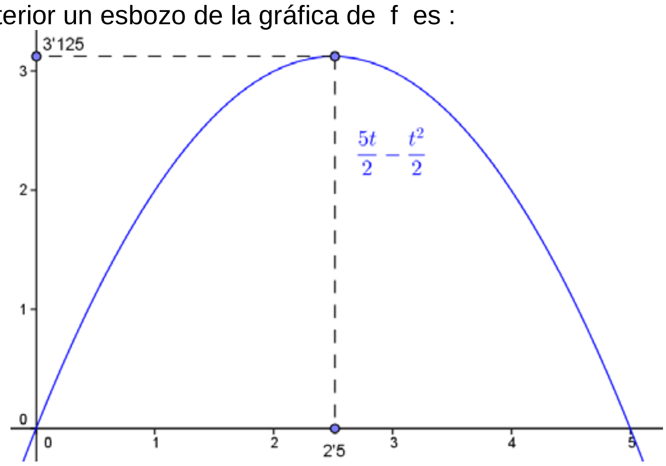
La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión: $f(t) = 5t/2 - t^2/2$

a)

Represente gráficamente f.

La gráfica de la función $5t/2 - t^2/2$ es un parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), pues el nº que multiplica a t^2 es negativo, por tanto el máximo está en el vértice, y la abscisa de dicho vértice es la solución de $f'(t) = 0 = (5t/2 - t^2/2)' = 0$, es decir $5/2 - 2t/2 = 0$, de donde $t = 5/2 = 2'5$, por tanto el vértice es V(5/2,f(5/2))=V(5/2,25/8)=V(2'5,3'125). Puntos de corte en (0,f(0))=(0,0) y de f(t)=0 tenemos $5t/2 - t^2/2 = t(5/2 - t/2) = 0$, de donde t = 0 y t = 5, con lo cual tenemos los puntos (0,0) y (5,0).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es :



b)
¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?

La altura a los 4 segundos es f(4) = $5(4)/2 – (4)^2/2$ **= 2 m.**
Llega al suelo a los 5 segundos (punto de corte con el eje OX, no consideramos el 0 porque aún no se ha lanzado la pelota)
c)
¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

Como ya hemos indicado en el aparatado (a), el máximo se encuentra en el vértice V(2'5,3'125), por tanto **la altura máxima se alcanza a los 2'5 segundos y dicha altura es de 3'125 metros.**

EJERCICIO 3_B
Parte I
De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcule la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:
a) (1 punto) Se eligen sin reemplazo.
b) (1 punto) Se eligen con reemplazo.

Solución

De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcule la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:
a)
Se eligen sin reemplazo.

Como se eligen dos personas es lo mismo primero hombre y después mujer, que primero mujer y después hombre.
Sean H_i y M_i a los sucesos "elegir hombre en el lugar i" y "elegir mujer en el lugar i", donde "i" indica primer o segundo lugar.

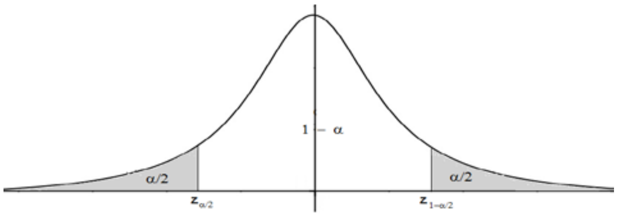
Me piden **p(elegir 2 de distinto sexo) =** $p(H_1)\cdot p(M_2/H_1) + p(M_1)\cdot p(H_2/M_1) = 2\cdot(7/10)\cdot(3/9) = 7/15 \cong$ **0'4667.**
b)
Se eligen con reemplazo.

Análogamente **p(elegir 2 de distinto sexo) =** $p(H_1)\cdot p(M_2/H_1) + p(M_1)\cdot p(H_2/M_1) = 2\cdot(7/10)\cdot(3/10)$ **= 21/50 = = 0'42.**

EJERCICIO 3_B
Parte 2
En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 12.
a) (1 punto) Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la media es 40, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la media de la población.
b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 90% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuyo límite inferior ha sido 36'71. ¿Qué tamaño de muestra se ha tomado en este caso?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\bar{x} = (a + b)/2$, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 12.
a)
Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la media es 40, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 12$, $n = 100$, $\bar{x} = 40$, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(40 - 1'96 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}, 40 + 1'96 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}\right) = \mathbf{(37'648, 42'352).}$$

b)
Con un nivel de confianza del 90% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuyo límite inferior ha sido 36'71. ¿Qué tamaño de muestra se ha tomado en este caso?

Datos del problema: $\sigma = 12$, $\bar{x} = 40$, intervalo = (a,b) con a = 36'71 = $\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, nivel de confianza = = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'10, es decir $\alpha/2$ = 0'10/2 = 0'05.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, las más próximas son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645.

De $36'71 = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 40 - 1'645 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}}$, tenemos $n \ge \left(\frac{1'645 \cdot 12}{40 - 36'71}\right)^2$ = 36, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 36**.