OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sea el sistema: $\left.\begin{array}{rrrrrrr} 3x & - & 2y & - & 2z & = & 3 \\ x & & & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$.

a) (0'5 puntos) Expréselo en forma matricial.
b) (0'5 puntos) ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Justifique la respuesta.
c) (2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto al número de soluciones.

Solución

Sea el sistema: $\left.\begin{array}{rrrrrrr} 3x & - & 2y & - & 2z & = & 3 \\ x & & & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$.

a)
Expréselo en forma matricial.

El sistema en forma matricial es $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde la matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; y según el teorema de Rouche, el sistema tiene solución si y solo si rango(A) = rango(A*).

b)
¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Justifique la respuesta.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} C_3 + C_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= 1\cdot(-1)\cdot(2-2) = 0$, A no tiene matriz inversa.

c)
Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto al número de soluciones.

En A, como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} C_3 + C_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= 1\cdot(-1)\cdot(2-2) = 0$, rango(A) < 3.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, rango(A*) = 2.

Como, rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, por el Teorema de Rouche e**l sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Tomamos la segunda y la tercera, pues con ellas hemos formado el menor de orden dos distinto de cero.

x - z = 1
2y - z = 0. Tomando y = $\lambda \in$ R, tenemos 2λ - z = 0, de donde z = 2λ. Entrando en la primera:
x - (2λ) = 1 $\rightarrow$ x = 1 + 2λ

Solución (x,y,z) = (1 + 2λ, λ,2 λ) con $\lambda \in$ R.

También se puede hacer por Gauss; $\left.\begin{array}{l} 3x-2y-2z = 3 \\ x \quad - z = 0 \\ 2y \quad - z = 0 \end{array}\right\}$ Cambio F_1 por F_2 $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x \quad - z = 1 \\ 3x-2y-2z = 3 \\ 2y \quad -z = 0 \end{array}\right\}$ $F_2 - F_1(-3)$

$\left.\begin{array}{l} x \quad - z = 1 \\ -2y+z = 0 \\ 2y \quad -z = 0 \end{array}\right\}$ $F_3 + F_2$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x \quad - z = 1 \\ -2y+z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$, Tomando y = $\lambda \in$ R, tenemos 2λ - z = 0, de donde z = 2λ. Entrando en la primera: $x \quad - (2\lambda) = 1 \rightarrow x = 1 + 2\lambda$

Solución (x,y,z) = $(1 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda)$ con $\lambda \in$ R.

EJERCICIO 2_A

Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la función $y = f(x)$, para $x \in (-\infty,+\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) (0'5 puntos) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) (0'5 puntos) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

Solución

Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$.

a)

Represente gráficamente la función $y = f(x)$, para $x \in (-\infty,+\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

Tenemos $f(x) = \dfrac{50x-100}{2x+5}$, cuya gráfica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H.

Dominio = R - {2x+5=0} = R - {-5/2}.

Cortes con los ejes:

Para x = 0, f(0) = -100/5 = - 20. Punto (0,-20).

Para f(x) = 0, 50x – 100 = 0, de donde x = 100/50 = 2. Punto (2,0).

Asíntotas:

El número que anula el denominador (2x+5 = 0) es x = -5/2, y como $\lim_{x\to -5/2+} \dfrac{50x-100}{2x+5} = (-225)/0^- = +\infty$, *la recta x = -5/2 es una A.V. de f, .*

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} (50x/2x) = \lim_{x\to+\infty} (50/2) = 25$, *la recta y = 25 es una A.H. en ± ∞.*

De $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \text{A.H.}) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{50x-100}{2x+5} - (5/2) \right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. y = 25 en + ∞.

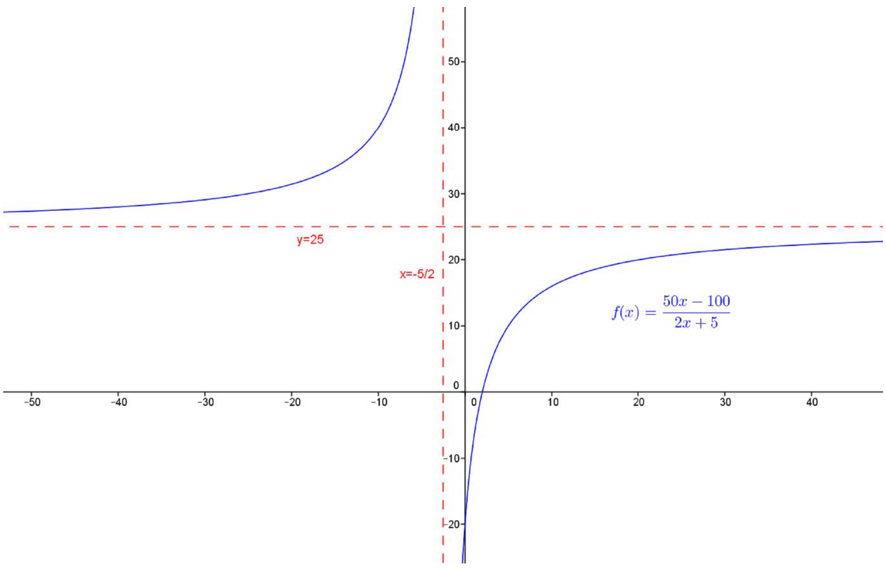
La monotonía es el estudio de la primera derivad f'(x).

$$f(x) = \frac{50x-100}{2x+5};\ f'(x) = \frac{50(2x+5) - 2(50x-100)}{(2x+5)^2} = \frac{450}{(2x+5)^2}$$

De f'(x) = 0, tenemos 450 = 0, lo cual es absurdo luego no tiene extremos relativos.

Como f'(0) = 450/25 = 18 > 0, la función f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en su dominio

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



b)
¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

La función está definida para $x \geq 0$, y observando la gráfica, vemos que empieza a estar por encima del eje de abscisas OX en $x = 2$, es decir **a partir del segundo año la empresa deja de tener pérdidas.**
c)
A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

Observando la gráfica, vemos que los beneficios están limitados porque f(x) no supera la A.H. $y = 25$, es decir **las ganancias están limitadas a 25 millones de pesetas.**

EJERCICIO 3_A

Parte I
Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.
a) (1 punto) Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?
b) (1 punto) Si extraemos solo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

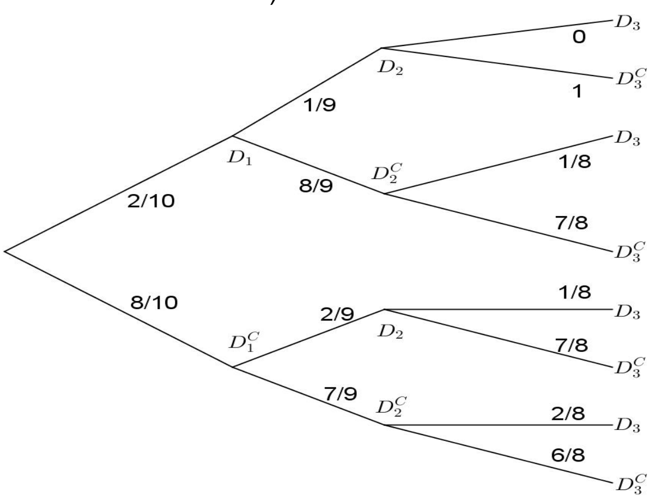
Solución

Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.
a)
Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?

Llamemos D_i y D_i^C, a los sucesos siguientes, "sacar tornillo defectuoso en la extracción número "i" " y "no sacar tornillo defectuoso en la extracción número "i"", respectivamente.

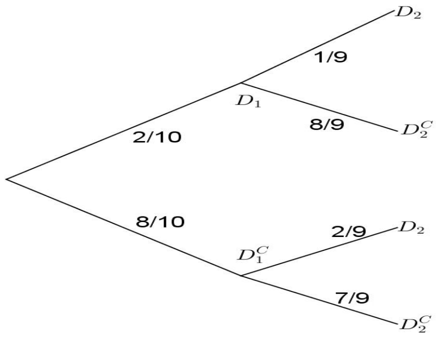
Datos del problema $p(D_1) = 2/10$; $p(D_2/D_1) = 1/9$; $p(D_3/(D_1 \cap D_2)) = 0$

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



p(localizar los tornillos defectuosos en tres extracciones) =
$= p(D_1)\cdot p(D_2/D_1)\cdot p(D_3^C/(D_1 \cap D_2)) + p(D_1)\cdot p(D_2^C/D_1)\cdot p(D_3/(D_1 \cap D_2^C)) + p(D_1^C)\cdot p(D_2/D_1^C)\cdot p(D_3/(D_1^C \cap D_2)) =$
$= (2/10)\cdot(1/9)\cdot(1) + (2/10)\cdot(8/9)\cdot(1/8) + (8/10)\cdot(2/9)\cdot(1/8)$ **$= 1/15 \cong 0'0667$.**
b)
Si extraemos solo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

Utilizamos el apartado (a) y parte del diagrama de árbol



Utilizando la fórmula de Bayes y el Teorema de la probabilidad Total

p(1º defectuoso sabiendo que la 2º ha sido defectuoso) = $p(D_1/D_2) = \dfrac{p(D_1 \cap D_2)}{p(D_2)} =$

$$= \frac{p(D_1)\cdot p(D_2/D_1)}{p(D_1)\cdot p(D_2/D_1) + p(D_1^C)\cdot p(D_2/D_1^C)} = \frac{(2/10)\cdot(1/9)}{(2/10)\cdot(1/9) + (8/10)\cdot(2/9)} \quad \mathbf{= 1/9 \cong 0'1111.}$$

EJERCICIO 3_A

Parte II

(2 puntos) Según un estudio sociológico, el gasto mensual de los jóvenes españoles durante los fines de semana se distribuye según una ley normal de media μ = 25000 pts. y desviación típica σ = 3000 pts. Tomamos, al azar, una muestra de 36 jóvenes.

¿Cuál es la probabilidad de que esta muestra tenga un gasto medio comprendido entre 23800 pts. y 26200 pts?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Según un estudio sociológico, el gasto mensual de los jóvenes españoles durante los fines de semana se distribuye según una ley normal de media μ = 25000 pts. y desviación típica σ = 3000 pts. Tomamos, al azar, una muestra de 36 jóvenes.

¿Cuál es la probabilidad de que esta muestra tenga un gasto medio comprendido entre 23800 pts. y 26200 pts?

Datos del problema: Distribución de la población $\rightarrow N(\mu;\sigma) = N(25000; 3000)$; μ **= 25000**; σ **= 3000**; n = 36.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(25000 ; \frac{3000}{\sqrt{36}})$ **= N(25000;500).**

Me están pidiendo la probabilidad "$p(23800 \le \overline{X} \le 26200)$"

Luego $\mathbf{p(23800 \le \overline{X} \le 26200)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{23800 - 25000}{500} \le Z \le \frac{26200 - 25000}{500}) =$

$= p(-2'4 \le Z \le 2'4) = p(Z \le 2'4) - p(Z \le -2'4) = p(Z \le 2'4) - (1 - p(Z \le 2'4)) = 2\cdot p(Z \le 2'4) - 1 =$

= {Mirando en la tabla} = 2·0'9918 – 1 **= 0'9836**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños; el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada a una sesión de un adulto es de 800 pts, mientras que la de un niño es de un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

Solución

Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños; el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada a una sesión de un adulto es de 800 pts, mientras que la de un niño es de un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

"x" = Número de adultos.
"y" = Número de niños.

Función Objetivo **F(x,y) = 800x + (800 – 40%de 800)y = 800x + (800 – 320)y = 800x + 480y**. (la entrada a una sesión de un adulto es de 800 pts, mientras que la de un niño es de un 40% menos).

Restricciones:

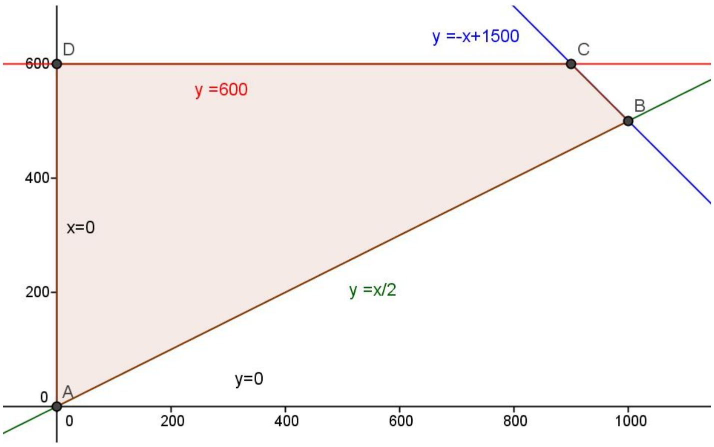
De capacidad máxima de 1500 personas → $x + y \le 1500$
El número de niños asistentes no puede superar los 600 → $y \le 600$.
El número de adultos no puede superar al doble del número de niños. → $x \le 2y$.
Al espectáculo va algún adulto y algún niño → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $x + y \le 1500$; $y \le 600$; $x \le 2y$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x + y = 1500$; $y = 600$; $x = 2y$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -x + 1500$; $y = 600$; $y = x/2$; $x = 0$; $y = 0$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $y = x/2$ e $y = -x+1500$, tenemos $x/2 = -x+1500$ → $x = -2x+3000$ → $3x = 3000$ → $x = 1000$ e $y = 500$, luego el punto de corte es B(1000,500)
De $y = -x+1500$ e $y = 600$, tenemos $-x+1500 = 600$ → $900 = x$, luego el punto de corte es C(900,600).
De $y = 600$ y $x = 0$, tenemos el punto de corte es D(0,600)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(1000,500), C(900,600) y D(0,600).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 800x + 480y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(1000,500), C(900,600) y D(0,600). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 800(0) + 480(0) = 0; **F(1000,500)** = 800(1000) + 480(500) **= 1040000**;

F(900,600) = 800(900) + 480(600) = 1008000; F(0,600) = 800(0) + 480(600) = 288000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1040000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(1000,500), es decir el máximo ingreso es de 1040000 pts. y se alcanza vendiendo 500 entradas para niños.**

EJERCICIO 2_B

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ a & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $(a \in R)$.

a) (1 punto) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = -2.
b) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando a = 2.
c) (1 punto) Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando a = 2.

Solución

Se considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ a & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $(a \in R)$.

a)
Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = -2.

Sabemos que si una función es derivable es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.
$ax^2 - 2$ es continua y derivable en R, en particular en x < -2.
a es continua y derivable en R, en particular en -2 < x < 2.
x es continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad de f en x = -2.

f(x) es continua en x = -2 si $f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$.

$f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$;

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (a) = a$, por tanto f(x) es continua en x = -1, si 4a - 2 = a, de donde **a = 2/3**.

b)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando a = 2.

Para a = 2, tenemos $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$;

Sabemos que si una función es derivable es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.

$2x^2 - 2$ es continua y derivable en R, en particular en x < -2.
2 es continua y derivable en R, en particular en -2 < x < 2.
x es continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = -2.

f(x) es continua en x = -2 si $f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$.

$f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (2x^2 - 2) = 8 - 2 = 6$;

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (2) = 2$, como los resultados no son iguales **f(x) no es continua en x = -2 y por tanto tampoco es derivable en x = -2**.

Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 2.
f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2) = 2$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x) = 2$, como los resultados son iguales **f(x) es continua en x = 2.**

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$;

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (0) = 0$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (1) = 1$. Como los resultados coinciden, **f(x) no es derivable en x = 2.**

Recapitulando **f es continua en R – {-2}, y derivable en R – {-2,2}.**

c)

Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando a = 2.

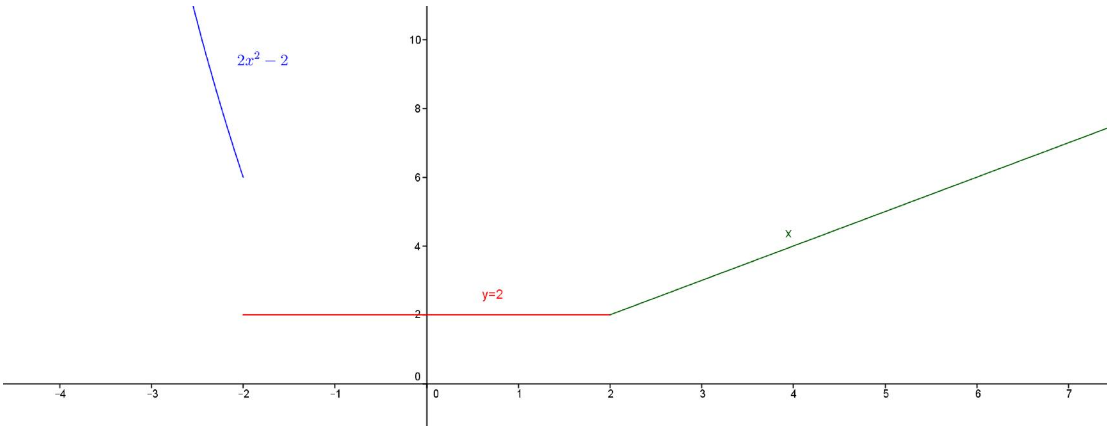
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases} ;$$

La gráfica de $2x^2 - 2$ ($x \le -2$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba (∪), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(2x^2 - 2)' = 0 = 4x$, de donde x = 0, luego vértice en V(0,-2), que no está en $x \le -2$. Los puntos de corte son (0,-2) y (±1,0), que tampoco están en ($x \le -2$).

La gráfica de 2 ($-2 < x \le -2$) es un segmento paralelo al eje OX.

La gráfica de x (x > 2) es una semirrecta, y con dos valores es suficiente para dibujarla, el (2*,2) y el (4,4).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar 5 con el dado trucado es 0'25, siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.

a) (1 punto) Determine la probabilidad de obtener un 2.

b) (1 punto) Dado que ha salido un 2, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

Solución

Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar 5 con el dado trucado es 0'25, siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.

a)

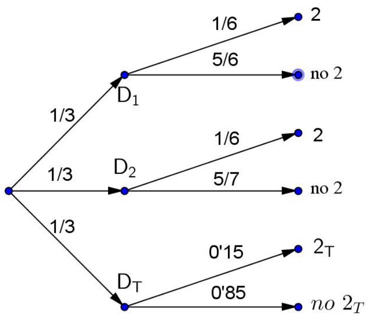
Determine la probabilidad de obtener un 2.

Llamemos D_1, D_2, D_T, 2, 2_T y 5_T, a los sucesos siguientes, "lanzar dado 1", "lanzar dado 2", "lanzar dado trucada", "salir 2 en dado normal", "salir 2 en dado trucado" y "salir 5 en dado trucado", respectivamente.

Datos del problema $p(D_1) = p(D_2) = p(D_T) = 1/3$, $p(2) = 1/6$, $p(5_T) = 0'25$.

En dado trucado $p(1_T) + p(2_T) + p(3_T) + p(4_T) + p(5_T) + p(1_T) = 1 = x + x + x + x + 0'25 + x = 1$, de donde $5x + 0'25 = 1 \to 5x = 1 - 0'25 = 0'75 \to x = 0'75/5 = 0'15$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(obtener un 2) = $p(D_1)\cdot p(2/D_1) + p(D_2)\cdot p(2/D_2) + p(D_T)\cdot p(2_T/D_T)$ =
= (1/3)·(1/6) + (1/3)·(1/6) + (1/3)·(0'15) **= 29/180 ≅ 0'01611.**

b)
Dado que ha salido un 2, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

Aplicando la Fórmula de Bayes

$p(D_T/2)$ = $\dfrac{p(D_T \cap 2)}{p(2)} = \dfrac{p(D_T)\cdot p(2_T/D_T)}{p(2)} = \dfrac{(1/3)\cdot(0'15)}{(29/180)}$ **= 9/29 ≅ 0'31034.**

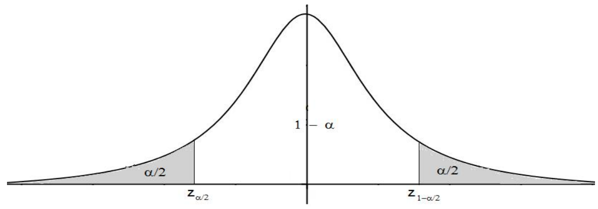
EJERCICIO 3_B

Parte II

Sabiendo que la varianza de una ley normal es σ^2 = 16, determine el nivel de confianza con el que puede decirse que su media μ está comprendida entre 6'2 y 8'8, si se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 de esa ley normal, cuya media muestral es 7'5.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·$z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Sabiendo que la varianza de una ley normal es σ^2 = 16, determine el nivel de confianza con el que puede decirse que su media μ está comprendida entre 6'2 y 8'8, si se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 de esa ley normal, cuya media muestral es 7'5.

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (6'2, 8'8), σ^2 = 16, σ = 4, n = 36, $\overline{x}$ = 7'5.

De la amplitud del intervalo es b – a = 2·$z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (8'8 – 6'2) = 2·$z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{4}{\sqrt{36}}$, es decir

$z_{1-\alpha/2}$ = (15'6) /8 **= 1'95** y mirando en las tablas vemos que $p(Z \le 1'95) = 1 - \alpha/2$ = 0'9744, por lo tanto tenemos que α = (1 – 0'9744)·2 = 0'0512, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0'0512 = = 0'9488 = 94'88%.**