OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones de pts y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón de pts y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje.
¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

Solución

Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones de pts y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón de pts y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje.
¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

“x” = Número de aviones del tipo A.
“y” = Número de aviones del tipo B.

Función Objetivo **F(x,y) = 4x + 1y**. (Un avión del tipo A cuesta 4 millones, un avión del tipo B cuesta 1 millón).

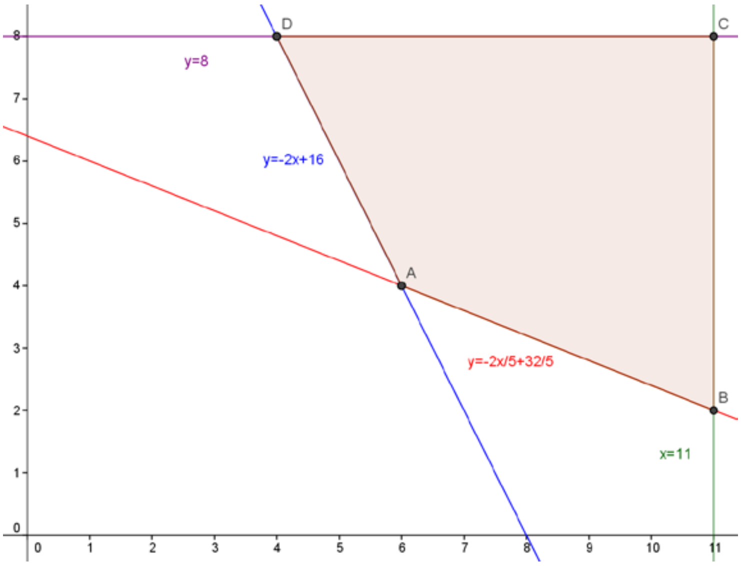
Restricciones:
Total 1600 personas y total equipaje 96 toneladas.
Avión tipo A puede transportar 200 personas, tipo B 100 personas → $200x + 100y \ge 1600$
Avión tipo A puede transportar 6 toneladas, tipo B 15 toneladas → $6x + 15y \ge 96$
Aviones disponibles 11 del tipo A y 8 del tipo B → $x \le 11$, $y \le 8$
Se contrata algún avión → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $200x + 100y \ge 1600$; $6x + 15y \ge 96$; $x \le 11$, $y \le 8$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades simplificándolas, y ya sus gráficas son rectas, $2x + y = 16$; $2x + 5y = 32$; $x = 11$, $y = 8$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos

$y = -2x + 16$; $y = -2x/5 + 32/5$; $x = 11$, $y = 8$; $x = 0$; $y = 0$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -2x+16$ e $y = -2x/5+32/5$, tenemos $-2x+16 = -2x/5+32/5$ → $-10x+80 = -2x+32$ → $48 = 8x$, luego $x = 6$ e $y = 4$, y el punto de corte es A(6,4)
De $y = -2x/5+32/5$ y $x = 11$, tenemos $y = 2$, luego el punto de corte es B(11,2)

De x = 11 e y = 8, tenemos el punto de corte es C(11,8).
De y = -2x+16 e y = 8, tenemos -2x+16 = 8, luego x = 4y el punto de corte es D(4,8)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(6,4), B(11,2), C(11,8) y D(4,8).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 4x + 1y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto convexo, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(6,4), B(11,2), C(11,8) y D(4,8). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(6,4) = 4(6) + 1(4) = 28; F(11,2) = 4(11) + 1(2) = 46;
F(11,8) = 4(11) + 1(8) = 52; **F(4,8)** = 4(4) + 1(8) **= 24**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es 24** (el valor menor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(4,8), es decir el coste mínimo ingreso es de 24 millones de pts. y se alcanza vendiendo contratando 4 aviones del tipo A y 8 aviones del tipo B.**

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) Represéntela gráficamente.
b) (0'5 puntos) Estudie su continuidad.
c) (1 punto) Obtenga, si existe, la derivada de f en *x* = 1/2, *x* = -1/2 y *x* = 0.
d) (0'5 puntos) Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

Solución

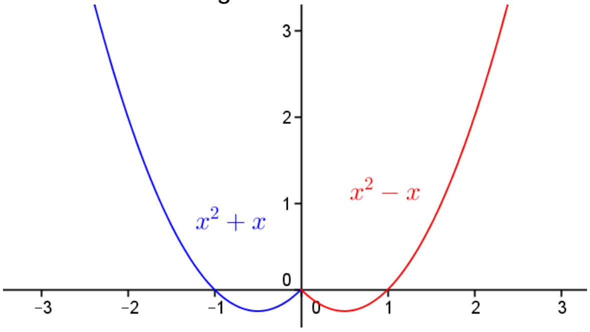
Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a)
Represéntela gráficamente.

La gráfica de $x^2 + x$ (x < 0) es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba (∪), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(x^2 + x)' = 0 = 2x + 1$, de donde x = -1/2, luego vértice en V(-1/2,-1/4). Los puntos de corte son (0,0) que no está en el dominio y $x^2 + x = 0 = x(x + 1)$, de donde x = 0 y x = -1, y el punto es (-1,0).

La gráfica de $x^2 - x$ ($x \geq 0$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba (∪), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(x^2 - x)' = 0 = 2x - 1$, de donde x = 1/2, luego vértice en V(1/2,-1/4). Los puntos de corte son (0,0), y de $x^2 - x = 0 = x(x - 1)$, de donde x = 0 y x = -1, y el punto es (1,0).

Teniendo en cuenta la anterior un esbozo de la gráfica es:



b)
Estudie su continuidad.

Observando la gráfica se ve **que f es continua en R**.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + x$ es continua y derivable en R, en particular en $x < 0$.
$x^2 - x$ es continua y derivable en R, en particular en $x > 0$.

Veamos la continuidad en x = 0.
f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + x) = 0 + 0 = 0$;
$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - x) = 0 - 0 = 0$, por tanto **f(x)** es continua en x = 0, es decir **es continua en R**.
c)
Obtenga, si existe, la derivada de f en *x* = 1/2, *x* = -1/2 y *x* = 0.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases};\ f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases};\ f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Veamos la derivada en x = 0.
f(x) es derivable en x = 0 si f'(0+) = f'(0-), es decir $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada)
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x + 1) = 0 + 1 = 1$;
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - 1) = 0 - 1 = -1$, como f'(0-) = 1 ≠ f'(0+) = -1, **f(x) no es derivable en x = 0**, es decir **es derivable en R – {0}**.
La derivada en x = 1/2 es **f'(1/2) =** 2(1/2) – 1 = **0**, lo cual ya lo sabíamos pues en x = 1/2 teníamos el vértice de la rama de la derecha.
La derivada en x = -1/2 es **f'(-1/2) =** 2(-1/2) + 1 = **0**, lo cual ya lo sabíamos pues en x = -1/2 teníamos el vértice de la rama de la izquierda.
d)
Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

Los vértices de cada rama son los mínimos relativos y absolutos, pues f'(-1/2) = f'(1/2) = 0, y la segunda derivada es positiva, es decir f''(-1/2) = f''(1/2) = 2 > 0.
Es decir los mínimos están en los puntos (-1/2,-1/4) y (1/2,-1/4).
Observando la gráfica vemos que **en x = 0 hay un máximo relativo** (no es derivable) y vale f(0) = 0

EJERCICIO 3_A

Parte I
En una ciudad el 60% de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30% son aficionados al baloncesto y el 25% a ambos deportes.
a) (0'5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser aficionado al fútbol" y "ser aficionado al baloncesto"?.
b) (0'75 puntos) Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?
c) (0'75 puntos) Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

Solución

En una ciudad el 60% de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30% son aficionados al baloncesto y el 25% a ambos deportes.
a)
¿Son independientes los sucesos "ser aficionado al fútbol" y "ser aficionado al baloncesto"?.

Llamamos A y B a los sucesos "aficionados al fútbol" y "aficionados al baloncesto".
Del problema tenemos: p(A) = 60% = 0'6, p(B) = 30% = 0'3, p(ambos) = $p(A\cap B)$ = 25% = 0'25
Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **¿son independientes A y B?.**

Como $p(A\cap B)$ = **0'25** $\neq$ $p(A)\cdot p(B)$ = 0'6·0'3 = **0'18**, **A y B no son independientes.**

b)

Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?

Me piden $\mathbf{p(B^C/A^C)} = \dfrac{p\left(B^C\cap A^C\right)}{p(A^C)}$

Tenemos $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'6 + 0'3 - 0'25 = 0'65

Tenemos $p(A^C) = 1 - p(A)$ = 1 – 0'6 = 0'4.

Tenemos $p(B^C\cap A^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(B\cup A)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(B\cup A)$ = 1 – 0'65 **= 0'35.**

Luego $\mathbf{p(B^C/A^C)} = \dfrac{p\left(B^C\cap A^C\right)}{p(A^C)}$ = 0'35/0'4 **= 7/8 = 0'875.**

c)

Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

Me piden $\mathbf{p(A^C/B^C)} = \dfrac{p\left(A^C\cap B^C\right)}{p(B^C)}$

Sabemos que $p(A\cup B)$ = 0'65

Tenemos $p(B^C) = 1 - p(B)$ = 1 – 0'3 = 0'7.

Sabemos que $p(B^C\cap A^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(B\cup A)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(B\cup A)$ = 1 – 0'65 **= 0'35.**

Luego $\mathbf{p(A^C/B^C)} = \dfrac{p\left(A^C\cap B^C\right)}{p(B^C)}$ = 0'35/0'7 **= 1/2 = 0'5.**

EJERCICIO 3_A

Parte II

(2 puntos) El periodo de funcionamiento de las bombillas de una determinada marca sigue una distribución normal de media 360 días y desviación típica 40 días.

Queremos elegir una muestra de bombillas de esa marca cuyo periodo medio de funcionamiento sea superior a 330 días, con probabilidad 0'97.

Calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

El periodo de funcionamiento de las bombillas de una determinada marca sigue una distribución normal de media 360 días y desviación típica 40 días.

Queremos elegir una muestra de bombillas de esa marca cuyo periodo medio de funcionamiento sea superior a 330 días, con probabilidad 0'97.

Calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Datos del problema: Distribución de la población $\to$ $N(\mu;\sigma)$ = N(360; 40); **μ = 360**; **σ = 40**.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \to N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(360 ; \frac{40}{\sqrt{n}})$ **= N(25000;500).**

Me dicen que "la probabilidad" $p(\overline{X} \geq 330)$ = 0'97.

De $\mathbf{p(\overline{X} \geq 330)}$ = 0'97 = {tipificamos} = $p(Z \geq \dfrac{330 - 360}{40/\sqrt{n}}) = p(Z \geq -0'75\cdot\sqrt{n})$ = {por simetría} =

= $p(Z \leq 0'75\cdot\sqrt{n})$. Luego $p(Z \leq 0'75\cdot\sqrt{n})$ = 0'97.

Mirando en la tabla N(0,1) $p(Z \leq 0'75\cdot\sqrt{n})$ = 0'97, vemos que la probabilidad 0'97 no viene en la tabla, y que la probabilidad más próxima es 0'9699, que corresponde a un valor 1'88. Igualando tenemos:

$1'88 = 0'75\cdot\sqrt{n}$, de donde n ≥ $(1'88/0'75)^2$ = 6'28, luego **el tamaño mínimo es n = 7.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (2 puntos) Determine dos números sabiendo que al dividir el mayor por el menor obtenemos 7 de cociente y 2 de resto, y que la diferencia entre el triple del mayor y el menor es 106.
b) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema e interprete gráficamente sus soluciones:

$$2x - y = 5$$
$$4(x - 2) = 1 + 2(y + 1).$$

Solución

a)
Determine dos números sabiendo que al dividir el mayor por el menor obtenemos 7 de cociente y 2 de resto, y que la diferencia entre el triple del mayor y el menor es 106.

Sean a y b los números y supongamos que a > b.
Tenemos a = 7b + 2 (sabemos que dividendo (a) es igual a divisor (b) por cociente (7) mas el resto (2))
Por otro lado 3a – b = 106 (el triple del mayor y el menor es 106).
Resolviendo las dos ecuaciones tenemos
$3(7b+2) - b = 106 \rightarrow 20b + 6 = 106$, de donde **b = 5** y **a** = 7(5) + 2 **= 37.**
b)
Resuelva el siguiente sistema e interprete gráficamente sus soluciones:

$$2x - y = 5$$
$$4(x - 2) = 1 + 2(y + 1).$$

Tenemos $y = 2x - 5$, con lo cual $4(x - 2) = 1 + 2((2x - 5) + 1) \rightarrow 4x - 8 = 4x - 7 \rightarrow$ **0x = 1**, lo cual es absurdo es decir **tenemos dos rectas paralelas y distintas**.
Si operamos en la segunda ecuación nos queda y = 2x – 5/2, con lo cual vemos que ambas recta tienen la misma pendiente, el 2 (son paralelas) y la ordenada en el origen es distinta, -5 y -5/2 (paralelas y distintas).

EJERCICIO 2_B

El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de *x* millones de pesetas produce una ganancia de *f(x)* millones de pts, siendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$.

a) (1 punto) Represente la función *f(x)*.
b) (0'75 puntos) Halle la inversión que produce máxima ganancia.
c) (0'75 puntos) Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.
d) (0'5 puntos) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

Solución

El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de *x* millones de pesetas produce una ganancia de *f(x)* millones de pts, siendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$.

a)
Represente la función *f(x)*.

La gráfica de $x^2/50 + 8x/25 - 8/5$ ($0 \le x \le 5$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba ($\cup$), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(x^2/50 + 8x/25 - 8/5)' = 0 = x/25 + 8/25$, de donde x = -8, luego **vértice** está en V(-8,-72/25), que **no está en 0 ≤ x ≤ 5**. Los puntos de corte son (0,-8/5), y de $f(x) = 0 \rightarrow x^2/50 + 8x/25 - 8/5 = 0 \rightarrow x^2 + 16x - 80 = 0 \rightarrow x = \frac{-16\pm\sqrt{256+320}}{2} = \frac{-16\pm 24}{2}$, es decir x = -20 y x = 4, puntos (-20,0) no está en su dominio y (4,0).

La gráfica de 5/(2x) (x > 5) es un trozo de hipérbola.
Sabemos que las hipérbolas tienen una asíntota horizontal (A.H) y una asíntota vertical (A.V), no tiene extremos y siempre es creciente o decreciente.
5/(2x) es continua y derivable en R – {0}, en particular en x > 5.

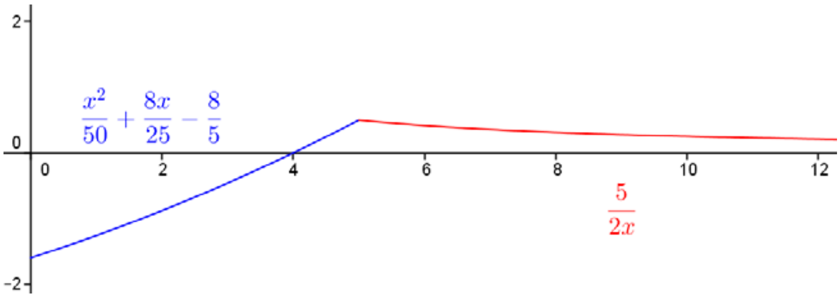
Cortes con los ejes:

Para x = 0, no está definida, y es la A.V..
Para f(x) = 0, 5 = 0, lo cual es absurdo y no corta a los ejes.

Asíntotas:
El número que anula el denominador (x = 0) es x = 0, y como $\lim_{x\to 0+}$ (5/2x) = (-5)/0^+ = + ∞, *la recta x = 0 es una A.V. de f, .*
Como $\lim_{x\to+\infty}$ (5/2x) = 0, *la recta y = 0 es una A.H. en + ∞.*
De $\lim_{x\to+\infty}$ (f(x) - A.H.) = $\lim_{x\to+\infty}$ ((5/2x) – 0) = 0^+, tenemos que f está por encima de la A.H. y = 0 en + ∞.

La monotonía es el estudio de la primera derivad f'(x).
f(x) = (5/2x); f'(x) = (-5/2x^2)
De f'(x) = 0, tenemos -5 = 0, lo cual es absurdo luego no tiene extremos relativos.
Como f'(10) = -5/200 < 0, la función f(x) *es estrictamente decreciente* (↘) en su dominio

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



b)
Halle la inversión que produce máxima ganancia.

Si observamos el gráfico el máximo se encuentra en el punto de división de las funciones es decir en x = 5, y en dicho valor tenemos f(5) = (5)^2/50 + 8(5)/25 – 8/5 = 1/2 = 0'5, luego **la máxima inversión es de cinco millones de pesetas, lo cual produce una ganancia de medio millón de pesetas**.
c)
Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.

Observando la gráfica vemos que la **ganancia nula se obtiene** en el corte con el eje de abscisas OX, es decir para x = 4, es decir **con una inversión de cuatro millones de pesetas**.
d)
Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

Como la gráfica tiene una asíntota horizontal y = 0 cuando x → ∞, luego **cuando la inversión se incrementa indefinidamente la ganancia es nula**.

EJERCICIO 3_B

Parte I
Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que sea de oro.
b) (1 punto) Sabiendo que ha sido de plata, calcule la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

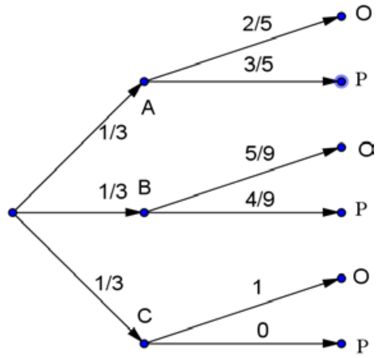
Solución

Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.
a)
Calcule la probabilidad de que sea de oro.

Llamemos O, P, A, B y C, a los sucesos siguientes, "sacar una moneda de oro", "sacar una moneda de plata", "cofre A", "cofre B" y "cofre C", respectivamente.

Datos del problema p(A)=p(B)=p(C) = 1/3, p(O/A) = 2/5, p(P/A) = 3/5, p(O/B) = 5/9, p(P/B) = 4/9, p(O/C) =1.
Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la

suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(obtener moneda de oro) = **p(O) =** p(A)·p(O/A) + p(B)·p(O/B) + p(C)·p(O/C) =
= (1/3)·(2/5) + (1/3)·(5/9) + (1/3)·(1) **= 88/135 ≅ 0'6519.**

b)
Sabiendo que ha sido de plata, calcule la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

Aplicando la Fórmula de Bayes

p(A/P) = $\dfrac{p(A \cap P)}{p(P)} = \dfrac{p(A)\cdot p(P/A)}{1 - p(O)} = \dfrac{(1/3)\cdot(3/5)}{1 - (88/135)}$ **= 27/47 ≅ 0'5745.**

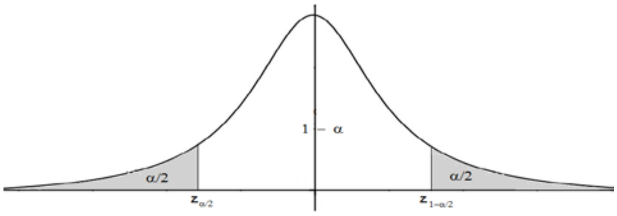
EJERCICIO 3_B

Parte II

En los individuos de una población, la cantidad de colesterol en sangre se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica de 0'5 g/l. Hemos tomado una muestra de 10 individuos, y se ha obtenido una media muestral de 1'7 g/l.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la cantidad media de colesterol en sangre de la población.
b) (1 punto) ¿Qué nivel de confianza tendría un intervalo para la media cuyos límites fuesen 1'2930 y 2'107?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la *__media__* *es* $\overline{x}$ *= (a + b)/2, el* *__error máximo__* *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el* *__tamaño mínimo__* *de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

En los individuos de una población, la cantidad de colesterol en sangre se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica de 0'5 g/l. Hemos tomado una muestra de 10 individuos, y se ha obtenido una media muestral de 1'7 g/l.

a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la cantidad media de colesterol en sangre de la población.

Datos del problema: σ = 0'5; n = 10, $\overline{x}$ = 1'7, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1'7 - 1'96\cdot\frac{0'5}{\sqrt{10}}, 1'7 + 1'96\cdot\frac{0'5}{\sqrt{10}}\right)$$ **= (1'3901, 2'0099).**

b)
¿Qué nivel de confianza tendría un intervalo para la media cuyos límites fuesen 1'2930 y 2'107?

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (1'2930, 2'107), σ = 0'5, n = 10, $\overline{x}$ = 1'7.

De la amplitud del intervalo es b – a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (2'107 – 1'2930) = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{0'5}{\sqrt{10}}$, es decir

$\mathbf{z_{1-\alpha/2}}$ = (0'814$\cdot\sqrt{10}$) /1 $\cong$ **2'5741** y mirando en las tablas vemos que $p(Z \le 2'57)$ = 1 - $\alpha/2$ = 0'9949, por lo tanto tenemos que α = (1 – 0'9949)·2 = 0'0102, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α =**
= 1 – 0'0102 = 0'9898 = 98'98%.