

## OPCIÓN A

## EJERCICIO 1\_A

a) (1 punto) Un establecimiento pone a la venta tres tipos de camisas A, B y C. Se sabe que la razón entre los precios de las camisas C y B es 19/18 y entre los de B y A es 6/5. Al comprar tres camisas, una de cada clase, se pagan 13000 pts. Plantee el sistema de ecuaciones que permita conocer el precio de cada camisa.

b) (2 puntos) Siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , razone si posee solución la ecuación matricial  $A \cdot X = B$

y, en caso afirmativo, resuélvala.

## Solución

a)

Un establecimiento pone a la venta tres tipos de camisas A, B y C. Se sabe que la razón entre los precios de las camisas C y B es 19/18 y entre los de B y A es 6/5. Al comprar tres camisas, una de cada clase, se pagan 13000 pts. Plantee el sistema de ecuaciones que permita conocer el precio de cada camisa.

$x$  = Precio de camisas del tipo A.  
 $y$  = Precio de camisas del tipo B.  
 $z$  = Precio de camisas del tipo C.

De "la razón entre los precios de las camisas C y B es 19/18"  $\rightarrow z/y = 19/18 \rightarrow 18z = 19y$ .  
 De "la razón entre los precios de las camisas B y A es 6/5"  $\rightarrow y/x = 6/5 \rightarrow 5y = 6x$ .  
 De "Al comprar tres camisas 13000 pts"  $\rightarrow x + y + z = 13000$ .

El sistema pedido es: 
$$\begin{cases} 18z & = & 19y \\ 5y & = & 6x \\ x + y + z & = & 13000 \end{cases}$$

b)

Siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , razone si posee solución la ecuación matricial  $A \cdot X = B$  y, en caso afirmativo, resuélvala.

La matriz A es una matriz triangular, por tanto su determinante  $\det(A) = |A|$  es el producto de los elementos de la diagonal principal, luego  $|A| = 1 \neq 0$ , luego tiene matriz inversa  $A^{-1}$  de fórmula  $A^{-1} = 1/(|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ , y el sistema  $AX = B$  tiene solución.

Multiplicando la expresión  $A \cdot X = B$ , por la izquierda por  $A^{-1}$  tenemos  $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ ,  $I_2 \cdot X = A^{-1} \cdot B$ , por tanto  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Calculamos  $A^{-1} = 1/(|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ ;  $|A| = 1$ ;  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , por tanto

$$A^{-1} = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego la matriz pedida es } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## EJERCICIO 2\_A

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura " $h$ " (en metros) a la que se encuentra en cada instante " $t$ " (en segundos) viene dada por la expresión:  $h(t) = -5t^2 + 40t$

a) (0'75 puntos) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

b) (1 punto) Represente gráficamente la función  $h(t)$ .

c) (0'75 puntos) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

d) (0'5 puntos) ¿En qué instante llega al suelo?

## Solución

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura " $h$ " (en metros) a la que se encuentra en cada instante " $t$ " (en segundos) viene dada por la expresión:  $h(t) = -5t^2 + 40t$

a)

¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

La gráfica de la función  $h(t) = -5t^2 + 40t$  es un parábola ( $\cap$ ) con las ramas hacia abajo, pues el  $n^\circ$  que multiplica a  $t^2$  es negativo, por tanto el máximo está en el vértice, y la abscisa es la solución de  $h'(t) = 0$   
 $h(t) = -5t^2 + 40t$ ;  $h'(t) = -10t + 40$

De  $h'(t) = 0$  tenemos  $-10t + 40 = 0$ , luego  $t = 4$  y  $h(4) = -5(4)^2 + 40(4) = 80$ , el vértice es  $V(4,80)$ , es decir **la altura máxima esde 80 metros y se alcanza en el instante  $t = 4$  segundos.**

b)

Represente gráficamente la función  $h(t)$ .

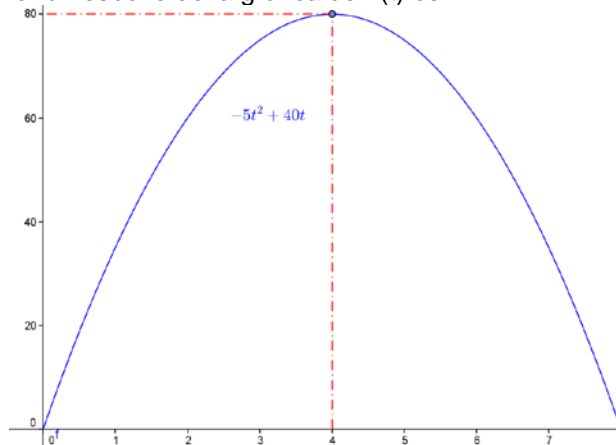
La gráfica de  $-5t^2 + 40t$  es un parábola ( $\cap$ ) con las ramas hacia abajo, pues el  $n^\circ$  que multiplica a  $t^2$  es negativo, hemos visto que el vértice  $V$  era  $V(4,80)$ .

Puntos de corte.

Para  $t = 0$ ,  $h(0) = -5(0)^2 + 40(0) = 0$ , punto  $(0,0)$ .

Para  $h(t) = 0 = -5t^2 + 40t = t(-5t+40) = 0$ , de donde  $t = 0$  y  $t = 8$ , y los puntos son  $(0,0)$  y  $(8,0)$ .

Teniendo en cuenta la anterior un esbozo de la gráfica de  $h(t)$  es:



c)

¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

Tenemos que resolver la ecuación  $-5t^2 + 40t = 60 \rightarrow 5t^2 - 40t + 60 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$ , de donde  $t = 2$  y  $t = 6$ , es decir **el objeto se encuentra a 60 metros a los 2 segundos y a los 6 segundos.**

d)

¿En qué instante llega al suelo?

Al calcular los puntos de corte, es decir  $-5t^2 + 40t = 0$ , hemos visto que  $t = 0$  y  $t = 8$ , luego **llega al suelo a los 8 segundos.**

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte I

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A) = 1/2$ ,  $p(B) = 1/3$  y  $p(A \cap B) = 1/4$ . Calcule:

a) (0'5 puntos)  $p(A/B)$  y  $p(B/A)$ .

b) (0'75 puntos)  $p(A \cup B)$ .

c) (0'75 puntos)  $p(A^C \cap B)$ . ( $A^C$  indica el contrario del suceso  $A$ ).

#### Solución

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A) = 1/2$ ,  $p(B) = 1/3$  y  $p(A \cap B) = 1/4$ . Calcule:

a)

$p(A/B)$  y  $p(B/A)$ .

Sabemos que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ ;  $p(B) = 1 - p(B^C)$ ;  $p(A^C) = 1 - p(A)$

$p(A^C \cap B^C) = \{\text{Ley de Morgan}\} = p(A \cup B)^C = \{\text{suceso contrario}\} = 1 - p(A \cup B)$ ;  $p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B)$ .

Me piden  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = (1/4)/(1/3) = 3/4 = 0'75$ , y  $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = (1/4)/(1/2) = 2/4 = 0'5$ .

b)

$p(A \cup B)$ .

Me piden  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1/2 + 1/3 - 1/4 = 7/12$ .

c)  
 $p(A^C \cap B)$ . ( $A^C$  indica el contrario del suceso A).

Me dicen  $p(A^C \cap B) = p(B \cap A^C) = p(B) - p(A \cap B) = 1/3 - 1/4 = 1/12$ .

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte II

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles. Se sabe que el número de kilómetros por día sigue una distribución normal con desviación típica de 6 Km/día. Se toman los recorridos de 100 vehículos de la flota, obteniéndose que la media muestral es de 165 Km/día.

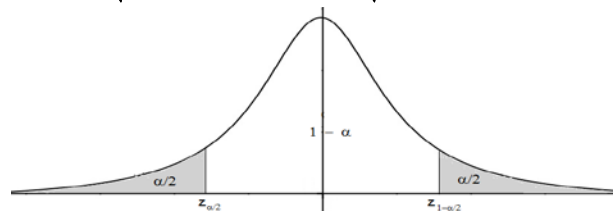
a) (1 punto) Construya un intervalo de confianza para la media de dicha distribución a un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para asegurar al nivel de confianza del 90% que el error cometido es a lo sumo 0'1?

#### Solución

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$ , el *estimador* MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a, b)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  y  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es  $\bar{x} = (a + b)/2$ , el error máximo de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para

el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$ , de donde  $E = (b - a)/2$ ,

por tanto el tamaño mínimo de la muestra es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{b - a} \right)^2$ .

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles. Se sabe que el número de kilómetros por día sigue una distribución normal con desviación típica de 6 Km/día. Se toman los recorridos de 100 vehículos de la flota, obteniéndose que la media muestral es de 165 Km/día.

a)

Construya un intervalo de confianza para la media de dicha distribución a un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema:  $\sigma = 6$ ,  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 165$ , nivel de confianza = 95% = 0'95 =  $1 - \alpha$ , de donde  $\alpha = 0'05$ , es decir  $\alpha/2 = 0'05/2 = 0'025$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 1'96$ , por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left( 165 - 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}}, 165 + 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}} \right) = (163'824, 166'176).$$

b)

¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para asegurar al nivel de confianza del 90% que el error cometido es a lo sumo 0'1?

Datos del problema:  $\sigma = 6$ , error =  $E \leq 0'1$ , nivel de confianza =  $90\% = 0'90 = 1 - \alpha$ , de donde  $\alpha = 0'1$ , es decir  $\alpha/2 = 0'1/2 = 0'05$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'95 no viene, y una de las más próximas es 0'9495 que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 1'64$ .

De  $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'64 \cdot 6}{0'1}\right)^2 = 9682'56$ , tenemos que **el tamaño mínimo es  $n = 9683$** .

## OPCIÓN B

### EJERCICIO 1\_B

a) (1 punto) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 18 \\ 2x + 3y \leq 26 \\ x + y \leq 16 \\ x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) (1 punto) Calcule los vértices de ese recinto.

c) (1 punto) Obtenga en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función  $F(x,y) = 5x + 3y$ . Diga en qué puntos se alcanzan.

### Solución

a) b) y c)

Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x + y \leq 18; \quad 2x + 3y \leq 26; \quad x + y \leq 16, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Calcule los vértices de ese recinto. Obtenga en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función  $F(x,y) = 5x + 3y$ . Diga en qué puntos se alcanzan.

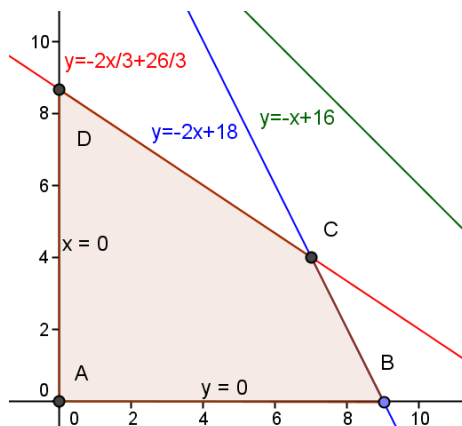
Función Objetivo  **$F(x,y) = 5x + 3y$** .

Las desigualdades  $2x + y \leq 18$ ;  $2x + 3y \leq 26$ ;  $x + y \leq 16$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas,  $2x + y = 18$ ;  $2x + 3y = 26$ ;  $x + y = 16$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -2x + 18; \quad y = -2x/3 + 26/3; \quad y = -x + 16, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De  $x = 0$  e  $y = 0$ , tenemos el punto de corte es  $A(0,0)$

De  $y = 0$  e  $y = -2x + 18$ , tenemos  $0 = -2x + 18$ , luego  $x = 9$  y el punto de corte es  $B(9,0)$

De  $y = -2x/3 + 26/3$  e  $y = -2x + 18$ , tenemos  $-2x/3 + 26/3 = -2x + 18 \rightarrow -2x + 26 = -6x + 54 \rightarrow 4x = 28$ , luego  $x = 7$  e  $y = -2(7) + 18 = 4$ , luego el punto de corte es  $C(7,4)$

De  $x = 0$  e  $y = -2x/3 + 26/3$ , tenemos  $y = 26/3$ , y el punto de corte es  $D(0, 26/3)$

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos:  $A(0,0)$ ,  $B(9,0)$ ,  $C(7,4)$  y  $D(0, 26/3)$ .

Calculemos el máximo y el mínimo de la función  $F(x,y) = 5x + 3y$  en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos  $F$  en los puntos anteriores  $A(0,0)$ ,  $B(9,0)$ ,  $C(7,4)$  y  $D(0,26/3)$ . En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$$F(0,0) = 5(0) + 3(0) = 0; \quad F(9,0) = 5(9) + 3(0) = 45;$$

$$F(7,4) = 5(7) + 3(4) = 47; \quad F(0,26/3) = 5(0) + 3(26/3) = 26.$$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función  $F$  en la región es 47** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice  $C(7,4)$** , y **el mínimo absoluto de la función  $F$  en la región es 0** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice  $A(0,0)$** .

### EJERCICIO 2\_B

(3 puntos) Determine los valores que han de tomar “ $a$ ” y “ $b$ ” para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 6x - 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable.

#### Solución

Determine los valores que han de tomar “ $a$ ” y “ $b$ ” para que la función:  $f(x) = \begin{cases} 4x + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 6x - 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

sea derivable.

Sabemos que si una función es derivable es continua.

$4x + b$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x < 1$ .  
 $ax^2 + 6x - 7$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x \geq 1$ .

Veamos la continuidad y la derivabilidad de  $f$  en  $x = 1$ .

Como  $f(x)$  es continua en  $x = 1$ , tenemos  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + b) = 4 + b.$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + 6x - 7) = a - 1. \text{ Igualando tenemos } \mathbf{4 + b = a - 1}.$$

$$\text{De } f(x) = \begin{cases} 4x + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + 6x - 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \text{ tenemos } f'(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + 6 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como  $f(x)$  es derivable en  $x = 1$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ , estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + 6) = 2a + 6$ , igualando  $4 = 2a + 6$  de donde  $\mathbf{a = -1}$ , y por tanto de  $4 + b = a - 1$ , tenemos  $4 + b = -1 - 1$ , luego  $\mathbf{b = -6}$ .

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte I

En un cineclub hay 80 películas; 60 son de “acción” y 20 de “terror”. Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?
- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

#### Solución

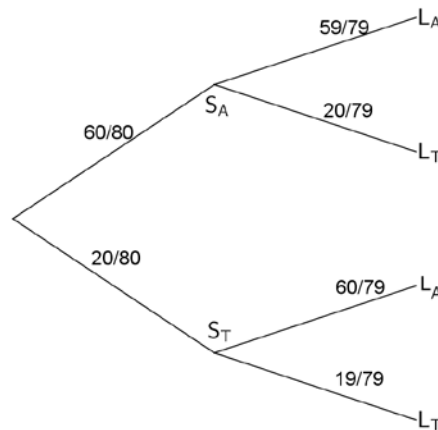
En un cineclub hay 80 películas; 60 son de “acción” y 20 de “terror”. Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?

Llamamos  $S_A$ ,  $S_T$ ,  $L_A$ ,  $L_T$ , a los sucesos “Luis elige una película de acción”, “Susana elige una película de terror”, “Luis elige una película de acción” y “Luis elige una película de terror”. Recordamos que Susana elige primero la película, luego los sucesos son dependientes.

Del problema tenemos  $p(S_A) = 60/80 = 6/8$ ,  $p(S_T) = 20/80 = 2/8$ ,  $p(L_A/S_A) = 59/79$ ,  $p(L_T/S_T) = 19/79$ , etc .....  
 Todo esto lo vemos mejor en un diagrama de árbol (recordamos que las probabilidades que salen desde un mismo nodo suman 1)



Me piden  $p(S_A \text{ y } L_A) = p(S_A \cap L_A) = p(S_A) \cdot p(L_A/S_A) = (60/80) \cdot (59/79) = 177/316 \approx 0'56013$ .

b)

¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$p(L_A) = p(S_A \cap L_A) + p(S_T \cap L_A) = p(S_A) \cdot p(L_A/S_A) + p(S_T) \cdot p(L_A/S_T) = (60/80) \cdot (59/79) + (20/80) \cdot (60/79) = 3/4 = 0'75.$$

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte II

Se desea estimar, con un error máximo de 0'2 horas, el tiempo medio de estudio diario de los alumnos de primer curso universitario. Se sabe que la desviación típica es de 1 hora y se toma una muestra aleatoria de 100 alumnos.

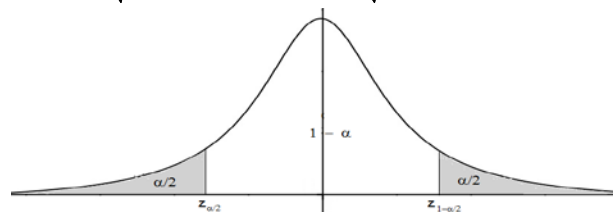
a) (1 punto) Calcule el nivel de confianza del intervalo que se obtendrá.

b) (1 punto) Calcule el número de individuos que debe tener una muestra para asegurarnos una confianza del 99%.

#### Solución

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$ , el estimador MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C. (\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a, b)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  y  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$  es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es  $\bar{x} = (a + b)/2$ , el error máximo de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para

el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$ , de donde  $E = (b - a)/2$ ,

por tanto el tamaño mínimo de la muestra es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{b - a} \right)^2$ .

Se desea estimar, con un error máximo de 0'2 horas, el tiempo medio de estudio diario de los alumnos de primer curso universitario. Se sabe que la desviación típica es de 1 hora y se toma una muestra aleatoria de 100 alumnos.

a)

Calcule el nivel de confianza del intervalo que se obtendrá.

Datos del problema: Error =  $E = 0'2$ ,  $\sigma = 1$ ,  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 7'5$ .

Sabemos que el nivel de confianza es "1 -  $\alpha$ "

De la fórmula del error  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , tenemos  $0'2 = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}$ , es decir  $z_{1-\alpha/2} = 2$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = p(Z \leq 2) = 0'9772$ , es decir  $1 - 0'9772 = \alpha/2$ , luego  $\alpha = 0'0456$ , y el nivel de confianza pedido es  $1 - \alpha = 1 - 0'0456 = \mathbf{0'9544 = 95'44\%}$

b)

Calcule el número de individuos que debe tener una muestra para asegurarnos una confianza del 99%.

Datos del problema:  $\sigma = 1$ , error =  $E \leq 0'2$ , nivel de confianza = 99% =  $0'99 = 1 - \alpha$ , de donde  $\alpha = 0'01$ , es decir  $\alpha/2 = 0'01/2 = 0'005$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de las más próximas es 0'9949, que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 2'57$ .

De  $n \geq \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2'57 \cdot 1}{0'2} \right)^2 = 165'1225$ , tenemos que **el tamaño mínimo es  $n = 166$** .