OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 150 y 100 pts el metro, respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo A y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo B.
Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

Solución

Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 150 y 100 pts el metro, respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo A y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo B.
Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

“x” = Longitud del cable tipo A.
“y” = Longitud del cable tipo B.

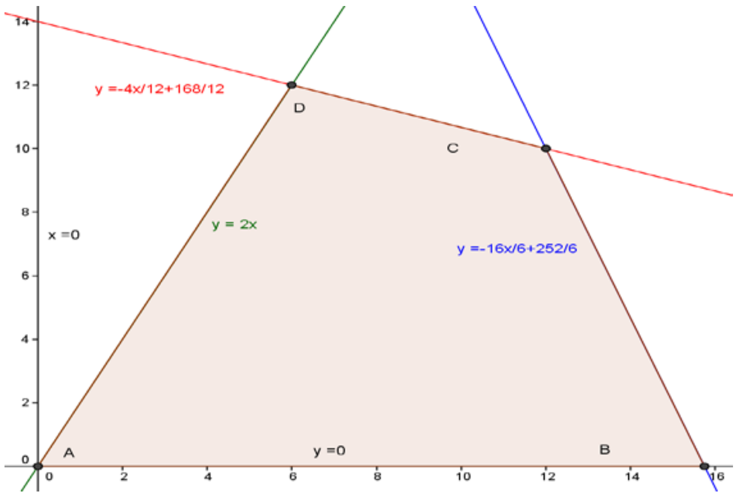
Función Objetivo F(x,y) = 150x + 100y. (se venderán a 150 y 100 pts el metro, respectivamente).

Restricciones:

16 Kg de plástico para tipo A, 6 Kg de plástico para tipo B. Total 252 Kg → $16x + 6y \le 252$
4 Kg de cobre para tipo A, 12 Kg de cobre para tipo B. Total 168 Kg → $4x + 12y \le 168$
La longitud de cable tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A. → $y \le 2x$.
Se fabrica algún metro de cable tipo A y tipo B → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $16x + 6y \le 252$; $4x + 12y \le 168$; $y \le 2x$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $16x + 6y = 252$; $4x + 12y = 168$; $y = 2x$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
$y = -16x/6 + 252/6 = -8x/3+42$; $y = -4x/12 + 168/12 = -x/3+14$; $y = 2x$; $x = 0$; $y = 0$.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De y = 0 e $y = -16x/6+252/6$, tenemos $0 = -16x/6+252/6$ → $x = 252/16 = 63/4$, y el punto de corte es B(63/4,0)
De $y = -16x/6+252/6$ e $y = -4x/12+168/12$, tenemos $-16x/6+252/6 = -x/3+14$ → $-16x+252 = -2x+84$ → $168 = 14x$, luego $x = 168/14 = 12$ e $y = -(12)/3+14 =10$, y el punto de corte es C(12,10).
De $y = 2x$ e $y = -x/3+14$, tenemos $2x = -x/3+14$ → $6x = -x+42$ → $7x = 42$, luego x = 6 e y = 12, y el

punto de corte es D(6,12)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(63/4,0), C(12,10) y D(6,12).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 150x + 100y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(63/4,0), C(12,10) y D(6,12). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 150(0) + 100(0) = 0; F(63/4,0) = 150(63/4) + 100(0) = 2362'5
F(12,10) = 150(12) + 100(10) **= 2800**; F(6,12) = 150(6) + 100(12) = 2100.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2800** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(12,10), es decir el máximo ingreso es de 2800 pts. y se alcanza utilizando 12 Hm de cable A y 10 Hm de cable B.**

EJERCICIO 2_A

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) (1 punto) $f(x) = \dfrac{L(x)}{x^2}$ (L(x) indica logaritmo neperiano de *x*)
b) (1 punto) $g(x) = (1 - x^3)\cdot\cos(x)$
c) (1 punto) $h(x) = 4x^3 - 5x + 1/e^x$

Solución

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{L(x)}{x^2}$; b) $g(x) = (1 - x^3)\cdot\cos(x)$; c) $h(x) = 4x^3 - 5x + 1/e^x$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

$((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(\cos(x))' = -\text{sen}(x)$; $(k)' = 0$.

a) $f(x) = \dfrac{L(x)}{x^2}$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot L(x)}{(x^2)^2} = \dfrac{x - 2x\cdot L(x)}{x^4}$;

b) $g(x) = (1 - x^3)\cdot\cos(x)$; $g'(x) = - 3x^2\cdot\cos(x) + (1 - x^3)\cdot(-\text{sen}(x)) = - 3x^2\cdot\cos(x) - (1 - x^3)\cdot\text{sen}(x)$;

c) $h(x) = 4x^3 - 5x + 1/e^x = 4x^3 - 5x + e^{-x}$; $h'(x) = 12x^2 - x - e^{-x} = 12x^2 - x - 1/e^x$

EJERCICIO 3_A

Parte I

Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tienen la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas.
B: 4 blancas y 6 negras.

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
c) (0'75 puntos) La bola extraída ha resultado ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución

Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tienen la siguiente composición:

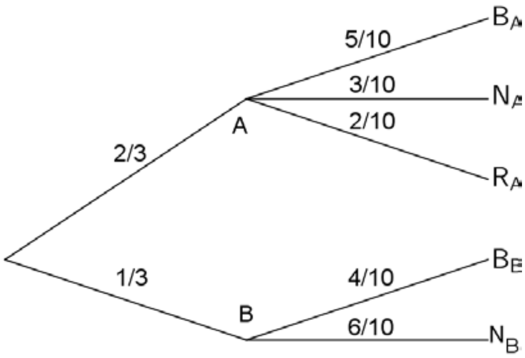
A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas.
B: 4 blancas y 6 negras.

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

Llamamos A, B, B_A, N_A, R_A, B_B, y N_B, a los sucesos “Elegir la urna A”, “Elegir la urna B”, “sacar bola blanca de la urna A”, “sacar bola negra de la urna A”, “sacar bola roja de la urna A”, “sacar bola blanca de la urna B” y “sacar bola negra de la urna B”.
Del problema tenemos p(A) = 4/6 = 2/3, p(B) = 2/6 = 1/3, $p(B_A)$ = 5/10, $p(N_A)$ = 3/10, $p(R_A)$ = 2/10, $p(B_B)$ = 4/10 y $p(N_B)$ = 6/10..
Todo esto lo vemos mejor en un diagrama de árbol (recordamos que las probabilidades que salen desde un mismo nodo suman 1)



Por el Teorema de la Probabilidad Total
p(bola blanca) = $p(A)\cdot p(B_A) + p(B)\cdot p(B_B)$ = (2/3)·(5/10) + (1/3)·(4/10) **= 7/15 ≅ 0’4667.**
b)
¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

Observamos que las bolas rojas sólo están en la urna A
p(bola roja) = $p(A)\cdot p(R_A)$ = (2/3)·(2/10) **= 2/15 ≅ 0’1333.**

c)
La bola extraída ha resultado ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

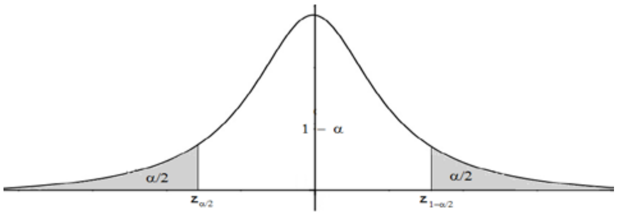
Utilizando la Fórmula de Bayes tenemos:
p(B/blanca) = $\dfrac{p(B\cap \text{blanca})}{p(\text{blanca})} = \dfrac{p(B)\cdot p(B_B)}{7/15}$ = (1/3)·(4/10)/(7/15) **= 2/7 ≅ 0’2857.**

EJERCICIO 3_A

Parte II
Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 Km con una desviación típica de 2250 Km.
a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.
b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 Km, con igual confianza?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$*, el error máximo de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15200 Km con una desviación típica de 2250 Km.
a)
Determine un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.

Datos del problema: n = 100, $\overline{x}$ = 15200, σ = 2250, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu)=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(15200 - 2'575\cdot\frac{2250}{\sqrt{100}},15200 + 2'575\cdot\frac{2250}{\sqrt{100}}\right) =$$

= (14620'625, 15779'375).

b)
¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 Km, con igual confianza?

Datos del problema: σ = 2250, error = E ≤ 500, $z_{1-\alpha/2}$ = 2'575.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575\cdot 2250}{500}\right)^2 \cong 134'27$, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 135**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1 punto) Determine los valores de *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

b) (2 puntos) Determine la matriz *X* de dimensión 2x2 tal que: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & -1\end{pmatrix}$.

Solución

a)
Determine los valores de *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad: $\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Multiplicando las matrices tenemos $\begin{pmatrix}x-y\\3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\3y-2\end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro:

x - y = 3 + 2x → -x - y = 3 → -x - y = 3
3x + 2y = 3y – 2 → 3x - y = - 2. (E2 – E1) → 4x = - 5, de donde **x = -5/4**, e **y** = -(-5/4)-3 **= -7/4.**

b)
Determine la matriz *X* de dimensión 2x2 tal que: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & -1\end{pmatrix}$.

De $X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}$, tenemos $X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}$, es decir

$X\cdot A = B$, con $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}$. Como $|A|=\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$, existe su matriz inversa A^{-1} =

$= (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$. Multiplicando la expresión $X\cdot A = B$ por la derecha por A^{-1} tenemos:

$X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X\cdot I_2 = B\cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B\cdot A^{-1}$

$A^t=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$; $Adj(A^t)=\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}$; $A^{-1}=(1/-1)\cdot\begin{pmatrix}5&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$;

Por tanto $X\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-5\\-23&14\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

Sea la función: $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3\\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$.

a) (2 puntos) Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.
b) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.

Solución

Sea la función: $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3\\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$.

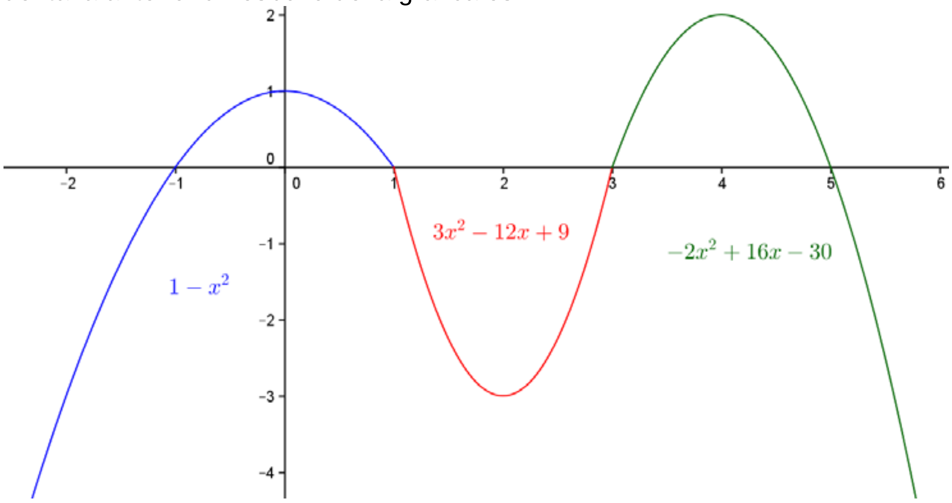
a)
Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.

La gráfica de $1 - x^2$ ($x \le 1$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo ($\cap$), pues el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en $(1 - x^2)' = 0 = -2x$, de donde $x = 0$, luego con vértice en V(0,1). Los puntos de corte son (0,1), y de $1 - x^2 = 0$ tenemos $x = 1$ y $x = -1$, y el los puntos son (-1,0) y (-1,0).

La gráfica de $3x^2 - 12x + 9$ ($1 < x \le 3$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia arriba ($\cup$), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en $(3x^2 - 12x + 9)' = 0 = 6x - 12$, de donde $x = 2$, luego vértice en V(2,-3). Los puntos de corte son (0,9), que *no está en su dominio*, y de $3x^2 -12x +9 = 0$ tenemos $x = 3$ y $x = 1$ (no está en su dominio), y el punto es (3,0).

La gráfica de $- 2x^2 + 16x - 30$ ($x > 3$) es un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo ($\cap$), pues el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en $(- 2x^2 + 16x - 30)' = 0 = -4x+16$, de donde $x = 4$, luego con vértice en V(4,2). Los puntos de corte son (0,-30) (no está en su dominio), y de
$- 2x^2 + 16x - 30 = 0$ tenemos $x^2 - 8x + 15 = 0$, de donde $x = 5$ y $x = 3$ (no está en su dominio), y el los puntos son (5,0).

Teniendo en cuenta la anterior un esbozo de la gráfica es:



Observando la gráfica vemos que f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,0)\cup(2,4)$.

f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(0,2)\cup(4,+\infty)$.

Por definición en x = 0 hay un máximo relativo que vale f(0) = 1.
Por definición en x = 2 hay un mínimo relativo que vale f(2) = -3.
Por definición en x = 4 hay un máximo relativo que vale f(4) = 2.
b)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

$1 - x^2$ es continua y derivable en R, en particular en x < 1.
$3x^2 - 12x + 9$ es continua y derivable en R, en particular en 1 < x < 3.
$- 2x^2 + 16x - 30$ es continua y derivable en R, en particular en x > 3.

Veamos la continuidad en x = 1 y x = 3..
f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (1 - x^2) = 1 - 1 = 0$;
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (3x^2 - 12x + 9) = 3 – 12 + 9 = 0$, por tanto **f(x)** es continua en x = 0.

f(x) es continua en x = 3 si $f(3) = \lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^+} f(x)$.
$f(3) = \lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} (3x^2 - 12x + 9) = 27 – 36 + 9 = 0$;
$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} (- 2x^2 + 16x - 30) = -18 + 48 - 30 = 0$, por tanto **f(x)** es continua en x = 3, es decir **f(x) es continua en R**.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}. \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 6x - 12 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -4x + 16 & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

Veamos la derivada en x = 1.
f(x) es derivable en x = 1 si f'(1-) = f'(1+), es decir $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada)
$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} (2x) = 2$; $\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} (6x - 12) = 18 - 12 = 6$, como f'(1-) = 2 ≠ f'(1+) = 6, **f(x) no es derivable en x = 1**.
Veamos la derivada en x = 3.
f(x) es derivable en x = 3 si f'(3-) = f'(3+), es decir $\lim_{x\to3^-} f'(x) = \lim_{x\to3^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada)
$\lim_{x\to3^-} f'(x) = \lim_{x\to3^-} (6x - 12) = 18 - 12 = 6$; $\lim_{x\to3^+} f'(x) = \lim_{x\to3^+} (-4x + 16) = -12 + 16 = 4$, como f'(3-) =6≠ f'(3+) = 4, **f(x) no es derivable en x = 3**, es decir **f es derivable en R - {1,3}.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz".
B: "sacar a lo sumo una cara".

a) (1 punto) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos *A* y *B*.
b) (1 punto) ¿Son independientes ambos sucesos?

Solución

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz".
B: "sacar a lo sumo una cara".

a) (1 punto) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos *A* y *B*.
b) (1 punto) ¿Son independientes ambos sucesos?

Llamemos C y X, a los sucesos siguientes, "sacar cara" y "sacar cruz", respectivamente. Sabemos que son independientes

Espacio muestral **E = {CCC; CCX; CXC; XCC; CXX; XCX; XXC; XXX}** hay 8 sucesos elementales.

A: “sacar al menos una cara y una cruz” = **{ CCX; CXC; XCC; CXX; XCX; XXC}**
B: “sacar a lo sumo una cara” = **{CXX; XCX; XXC; XXX}**
b)
¿Son independientes ambos sucesos?

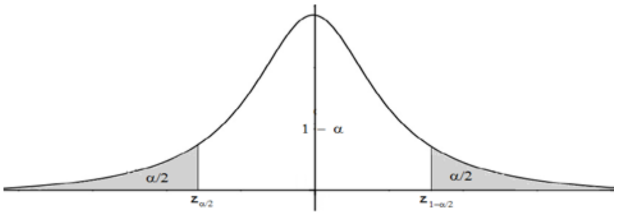
Los sucesos son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$
$A\cap B$ = **{CXX; XCX; XXC}**.
Como $p(A\cap B) = 3/8 = p(A)\cdot p(B) = (6/8)\cdot(4/8) = 3/8$, **los sucesos son independientes.**

EJERCICIO 3_B

Parte II
(2 puntos) La cantidad de hemoglobina en sangre del hombre sigue una ley normal con desviación típica de 2 g/dl.
Calcule el nivel de confianza de una muestra de 12 extracciones de sangre que indique que la media poblacional de hemoglobina en sangre está entre 13 y 15 gramos por decilitro.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$*, el error máximo de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es* $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$*, de donde* $E = (b - a)/2$*, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

La cantidad de hemoglobina en sangre del hombre sigue una ley normal con desviación típica de 2 g/dl.
Calcule el nivel de confianza de una muestra de 12 extracciones de sangre que indique que la media poblacional de hemoglobina en sangre está entre 13 y 15 gramos por decilitro.

Datos del problema: $\sigma = 2$, $n = 12$, intervalo de confianza $(13,15) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$.

Sabemos que el nivel de confianza es “$1 - \alpha$”.

De la fórmula $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $2 = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{2}{\sqrt{12}}$, es decir $z_{1-\alpha/2} = \frac{\sqrt{12}}{2} \cong 1'73$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = p(Z \le 1'73) = 0'9582$, es decir $1 - 0'9582 = \alpha/2$, luego $\alpha = 0'0836$, y el nivel de confianza pedido es **1 - α =** 1 - 0'0836 = **0'9164 = 91'64%**