OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Calcule los valores de *x* para los que no existe la inversa de A.
b) (1'5 puntos) Para x = 3, calcule, si es posible, A^{-1}.

Solución

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule los valores de *x* para los que no existe la inversa de A.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & x+1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna $= 0 – (1)(2x - x(x+1)) + 0 = -2x+x^2+x = x^2- x = x(x-1) = 0$,
de donde x = 0 y x = 1, es decir **no existe la matriz inversa A^{-1} para x = 0 y x = 1**.

b)
Para x = 3, calcule, si es posible, A^{-1}.

Para x = 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta el apartado (a) tenemos $|A| = 3\cdot(3-1) = 6 \neq 0$, por tanto existe matriz inversa A^{-1} cuya fórmula es $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = 6$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{A^{-1}} = (1/6)\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "*x*" euros, su beneficio diario, en euros, será: $B(x) = -10x^2 + 100x – 210$.
a) (1 punto) Represente la función precio-beneficio.
b) (1 punto) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?
c) (1 punto) Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

Solución

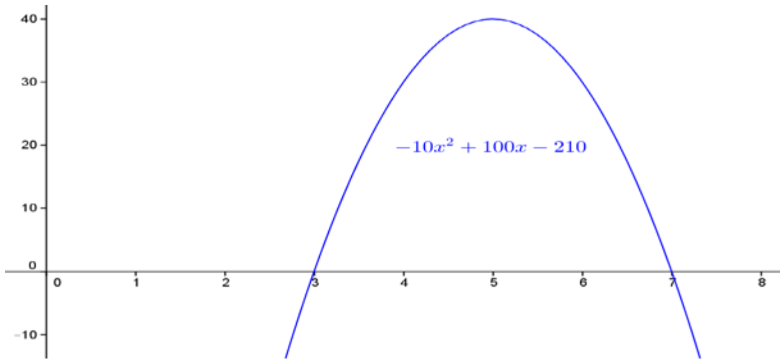
Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "*x*" euros, su beneficio diario, en euros, será: $B(x) = -10x^2 + 100x – 210$.

a)
Represente la función precio-beneficio.

La gráfica de $B(x) = -10x^2 + 100x – 210$, es una parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo; abscisa de su vértice V en $B'(x) = 0 = - 20x + 100 \rightarrow x = 5$, es decir su vértice es V(5, B(5)) = V(5,40). Sus cortes con los ejes son:
Para x = 0, punto (0,-210).

Para $B(x) = 0 = -10x^2 + 100x - 210 \rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$, de donde x = 7 y x=3 $\rightarrow$ puntos (3,0) y (7,0).

Un esbozo de la funcion precio-beneficio es:



b)
Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

El beneficio máximo está en el vértice V(4, 40), es decir **el máximo beneficio es 40€ y se obtiene vendiendo la caja de fresas a 5€.**
c)
Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

Observando el gráfico **el agricultor tiene pérdidas si vende la caja a menos de 3€ o a más de 7€.**

EJERCICIO 3_A
Parte I
Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son p(A) = 2/3 y p(B) = 1/2.
a) (0'75 puntos) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?
b) (0'75 puntos) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule p(A∪B).
c) (0'5 puntos) Suponiendo que A∪B = E, calcule p(A∩B).

Solución

Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son p(A) = 2/3 y p(B) = 1/2.
a)
¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?

Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$
$p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B); $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.
A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B); A y B son incompatibles si p(A∩B) = 0.

Me piden ¿ A y B son incompatibles?
Tenemos p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) y por otro lado p(A) + p(B) = 2/3 + 1/2 = 7/6 > 1. Como la probabilidad no puede ser mayor de 1, obligatoriamente p(A∩B) > 0, por lo tanto **A y B no son incompatibles.**
b)
Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule p(A∪B).

Como los sucesos son independientes p(A∩B) = p(A)·p(B) = (2/3)·(1/2) = 1/3, luego:
p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) = 2/3 + 1/2 - 1/3 **= 5/6.**
c)
Suponiendo que A∪B = E, calcule p(A∩B).

Como p(A∪B) = p(E) = 1, tenemos p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B), de donde:
p(A∩B) = p(A) + p(B) - p(A∪B) = 2/3 + 1/2 – 1 **= 1/6.**

EJERCICIO 3_A
Parte II
(2 puntos) Una ciudad de 2000 habitantes está poblada por personas de pelo negro, rubio o castaño.
Se ha seleccionado, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra constituida por 28 personas de pelo negro, 32 de pelo rubio y 20 de pelo castaño.
Determine cuál es la composición, según el color del pelo, de esa ciudad.

Solución

Una ciudad de 2000 habitantes está poblada por personas de pelo negro, rubio o castaño.
Se ha seleccionado, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra constituida por 28 personas de pelo negro, 32 de pelo rubio y 20 de pelo castaño.
Determine cuál es la composición, según el color del pelo, de esa ciudad.

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es N_1, N_2, ..., N_k, y si n_1, n_2, ..., n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números n_1, n_2, ..., n_k proporcionales a los tamaños de los estratos N_1, N_2, ..., N_k, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{28}{N_1} = \frac{32}{N_2} = \frac{20}{N_3} = \frac{28+32+20}{2000} = \frac{80}{2000}$.

De $\frac{28}{N_1} = \frac{80}{2000}$, tenemos $N_1 = \frac{28 \cdot 2000}{80}$ = **700 personas con el pelo negro en la ciudad**.

De $\frac{32}{N_2} = \frac{80}{2000}$, tenemos $N_2 = \frac{32 \cdot 2000}{80}$ = **800 personas con el pelo rubio en la ciudad**.

De $\frac{20}{N_3} = \frac{80}{2000}$, tenemos $N_3 = \frac{20 \cdot 2000}{80}$ = **500 personas con el pelo castaño en la ciudad**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 10 &\geq 0 \\ x - y - 2 &\leq 0 \\ 3x + 4y - 20 &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

a) (2 puntos) Dibuje dicho recinto y determine sus vértices.
b) (1 punto) Determine en qué punto de ese recinto alcanza la función F(x,y) = 4x + 3y el máximo valor.

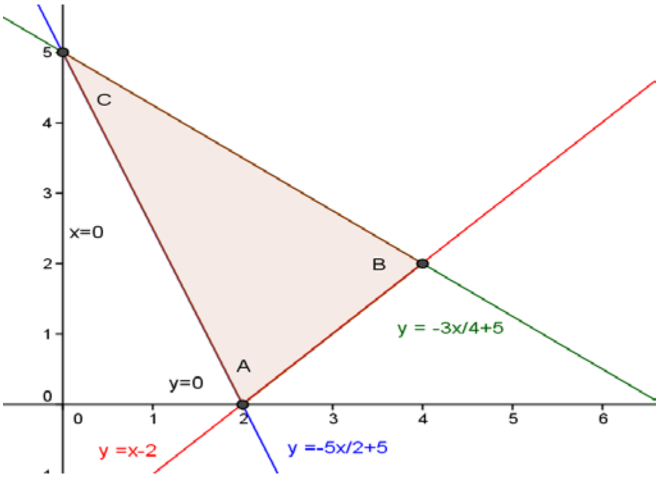
Solución

a) b) y c)
Dibuje la región factible determinada por dichas restricciones:
5x + 2y – 10 ≥ 0; x - y – 2 ≤ 0; 3x + 4y - 20 ≤ 0, x ≥ 0 e y ≥ 0. Calcule los vértices de dicha región. Obtenga los puntos en los que la función objetivo F(x,y) = x + 2y presenta el máximo.

Función Objetivo F(x,y) = 4x + 3y.

Las desigualdades 5x + 2y – 10 ≥ 0; x - y – 2 ≤ 0; 3x + 4y - 20 ≤ 0, x ≥ 0 e y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, 5x + 2y – 10 = 0; x - y – 2 = 0; 3x + 4y - 20 = 0, x = 0 e y = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -5x/2 + 5; y = x – 2; y = -3x/4 + 5, x = 0 e y = 0.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = 0 e y = x-2, tenemos 0 = x-2, de donde x = 2, y el punto de corte es A(2,0)
De y = x-2 e y = -3x/4+5, tenemos x-2 = -3x/4+5, luego 4x-8 = -3x+20, 7x = 28, es decir x = 4 e y = 2, y el punto de corte es B(4,2)
De x = 0 e y = -3x/4+5, tenemos y = 5, y el punto de corte es C(0,5).

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: A(2,0), B(4,2) y C(0,5).

Calculemos el máximo y el mínimo de la función F(x,y) = 4x + 3y en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(2,0), B(4,2) y C(0,5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(2,0) = 4(2) + 3(0) = 8; **F(4,2) =** 4(4) + 3(2) **= 22**; F(0,5) = 4(0) + 3(5) = 15;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 22** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(4,2).**

EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) Dada la función f(x) = x^3 + bx + c, determine los valores de *"b"* y "*c*" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (-1,3).
b) (1'5 puntos) Calcule "*a*" para que el valor mínimo de la función g(x) = x^2 + 2x + a sea igual a 8.

Solución

a)
Dada la función f(x) = x^3 + bx + c, determine los valores de *"b"* y "*c*" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (-1,3).

Como f tiene en el punto (-1,3) un máximo relatico (anula la 1ª derivada), tenemos que **f(-1) = 3** (por punto) y **f'(-1)= 0** (por extremo).

f(x) = x^3 + bx + c; f '(x) = $3x^2$ + b.

De f(-1) = 3 → $(-1)^3$ + b(-1) + c = 3 → -1 – b + c = 3 → **– b + c = 4.**
De f'(1) = 0 → $3(-1)^2$ + b = 0 → 3 + b = 0, de donde **b = -3.** Entrando en la anterior tenemos:
– b + c = 4 → – (-3) + c = 4 → c = 1, de donde **b = -3 y c = 1**.
b)
Calcule "*a*" para que el valor mínimo de la función g(x) = x^2 + 2x + a sea igual a 8.

Sabemos que los extremos relativos (mínimo) anulan la 1ª derivada, luego tenemos que resolver la ecuación g'(x) = 0 y después imponer la condición de que el valor del mínimo es 8.
De g'(x) = 0, tenemos 2x + 2 = 0, luego **x = -1, que es la abscisa del mínimo.**
De g(-1) = 8, tenemos $(-1)^2$ + 2(-1) + a = 8, **de donde a = 9.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

El 35% de los estudiantes de un centro docente practica el fútbol. El 70% de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25% de los que no practican el fútbol.

Calcule la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante de ese centro:

a) (1 punto) Estudie Matemáticas.

b) (1 punto) Practique el fútbol, sabiendo que no es alumno de Matemáticas.

Solución

El 35% de los estudiantes de un centro docente practica el fútbol. El 70% de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25% de los que no practican el fútbol.

Calcule la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante de ese centro:

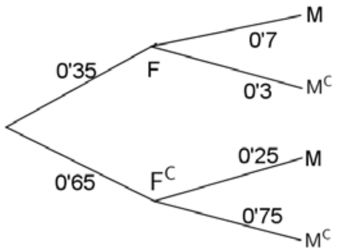
a)

Estudie Matemáticas.

Llamamos F, F^C, M y M^C, a los sucesos "practica el fútbol", "no practica el fútbol", "estudia Matemáticas" y "no estudia Matemáticas".

Del problema tenemos p(F) = 35% = 0'35, p(M/F) = 70% = 0'7, p(M/ F^C) = 25% = 0'25,..

Todo esto lo vemos mejor en un diagrama de árbol (recordamos que las probabilidades que salen desde un mismo nodo suman 1)



Por el Teorema de la Probabilidad Total

p(Estudie Matemáticas) = p(M) = p(F)·p(M/F) + p(F^C)·p(M/F^C) = (0'35)·(0'7) + (0'65)·(0'25) **= 0'4075.**

b)

Practique el fútbol, sabiendo que no es alumno de Matemáticas.

Utilizando la Fórmula de Bayes tenemos:

p(F/M^C) = $\dfrac{p\left(F\cap M^C\right)}{p(M^C)} = \dfrac{p(F)\cdot\left(M^C/F\right)}{1 - p(M)}$ = ((0'35)·(0'3)) / (1 – 0'4075) **= 14/79 ≅ 0'1772.**

EJERCICIO 3_B

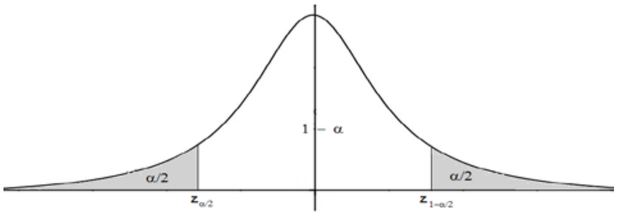
Parte II

(2 puntos) En una población normal con varianza conocida se ha tomado una muestra de tamaño 49 y se ha calculado su media: $\bar{x}$ = 4'2.

Determine la varianza de la población sabiendo que el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional es (3'64,4'76).

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\bar{X}$, sigue una N(μ,$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\bar{X} \approx N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\bar{X} \rightarrow N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ = - $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

En una población normal con varianza conocida se ha tomado una muestra de tamaño 49 y se ha calculado su media: $\overline{x}$ = 4’2.
Determine la varianza de la población sabiendo que el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional es (3’64,4’76).

Datos del problema: n = 49, $\overline{x}$ = 4’2, intervalo de confianza = (3’64,4’76) = $\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = = (a,b), nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde α = 0’05, es decir $\alpha/2$ = 0’05/2 = 0’025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0’025 = 0’975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96.

De la fórmula b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos 1’12 = $2\cdot 1'96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$, es decir σ = 2, por tanto **la varianza pedida es σ^2 = 4.**