OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35 euros. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

Solución

"x" = Número de librerías de 1 estantes.
"y" = Número de librerías de 3 estantes.

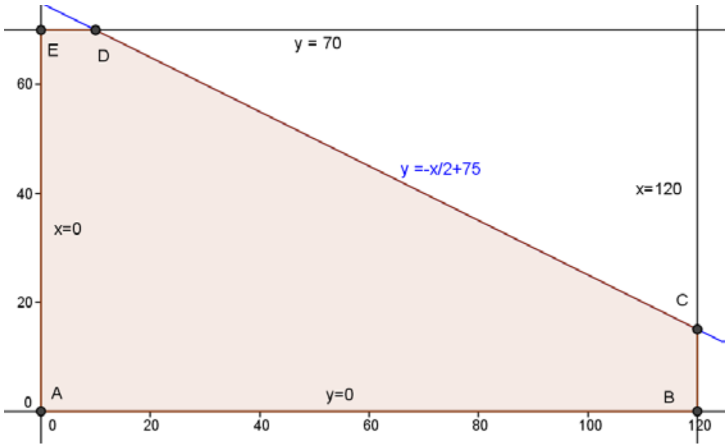
Función Objetivo **F(x,y) = 20x + 35y**. (1 estante precio de venta 20 € y 3 estantes precio de venta 35 €).

Restricciones:

Total 600 kg, 4 kg para librería de 1 estante y 8 kg para la de 3 estantes → $4x + 8y \le 600$.
No se pueden fabricar más de 120 librerías 1 estante → $x \le 120$.
No se pueden fabricar más de 70 librerías 3 estantes. → $y \le 70$.
Se fabrica alguna librería de 1 estante y de 3 estantes. → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $4x + 8y \le 600$; $x \le 120$; $y \le 70$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $4x + 8y = 600$; $x = 120$; $y = 70$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$$y = -x/2 + 75; \quad x = 120; \quad y = 70; \quad x = 0; \quad y = 0.$$
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $x = 120$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es B(120, 0)
De $x = 120$ e $y = -x/2 + 75$, tenemos $y = 15$, y el punto de corte es C(120,15)
De $y = 70$ e $y = -x/2 + 75$, tenemos $70 = -x/2 + 75 \rightarrow 140 = -x + 150$, luego $x = 10$, y el punto de corte es D(10,70)
De $x = 0$ e $y = 70$, tenemos el punto de corte es E(0,70)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(120, 0), C(120,15), D(10,70) y E(0,70).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 20x + 35y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(120, 0), C(120,15), D(10,70) y E(0,70). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 20(0) + 35(0) = 0; F(120,0) = 20(120) + 35(0) = 2400; **F(120,15)** = 20(120) + 35(15) **= 2925**;
F(10,70) = 20(10) + 35(70) = 2650; F(0, 0) = 20(0) + 35(70) = 2450;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2925** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(120,15), es decir el máximo ingreso es de 2925 € y se alcanza fabricando 120 librerías de 1 estante y 15 librerías de 3 estantes**.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Represéntela gráficamente.
b) (1'5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.

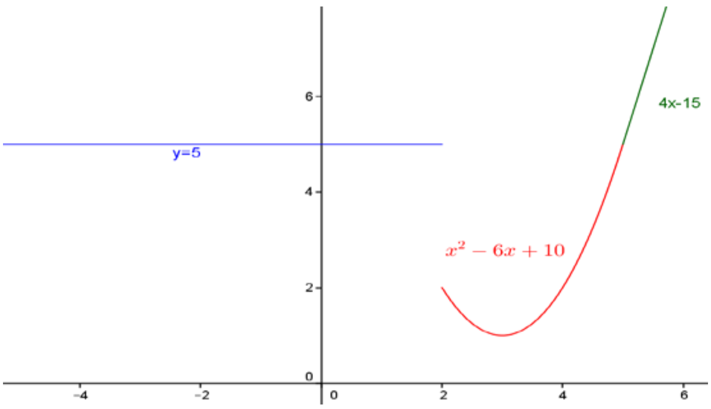
Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

a)
Represéntela gráficamente.

La gráfica de 5 es una recta paralela al eje de abscisas OX, pero sólo la dibujamos para $x \le 2$, es decir una semirrecta.
La gráfica de $x^2 - 6x + 10$ es una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con vértice V de abscisa la solución de $f'(x) = 0 = 2x - 6$, de donde $x = 3$ y $V(3,f(3)) = (3,1)$, pero sólo la dibujamos en $2 < x < 5$, es decir entre $(2^+,2)$ y $(5^-,5)$.
La gráfica de $4x - 15$ es una recta que no pasa por el origen, pero sólo la dibujamos a partir de $x \ge 5$, es decir una semirrecta. En $x = 5$ vale 5.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable. Observando su gráfica vemos que no es continua en $x = 2$, por tanto tampoco es derivable en $x = 2$.

5 es continua y derivable en R, en particular en $x < 2$.
$x^2 - 6x + 10$ es continua y derivable en R, en particular en $2 < x < 5$.
$4x - 15$ es continua y derivable en R, en particular en $x > 5$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 5$.

f(x) es continua en $x = 5$ si $f(5) = \lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^+} f(x)$.

$f(5) = \lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} (x^2 - 6x + 10) = (5)^2 - 6(5) + 10 = 5$;

$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} (4x - 15) = 4(5) - 15 = 5$, por tanto **f(x) es continua en x = 5**.

Recapitulando **f es continua en R – {2}**.

De $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 4 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 5 si $\lim_{x\to 5^-} f'(x) = \lim_{x\to 5^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 5^-} f'(x) = \lim_{x\to 5^-} (2x - 6) = 2(5) - 6 = 4$; $\lim_{x\to 5^+} f'(x) = \lim_{x\to 5^+} (4) = 4$. Como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = 5.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

Recapitulando **f es derivable en R – {2}.**

EJERCICIO 3_A

Parte I

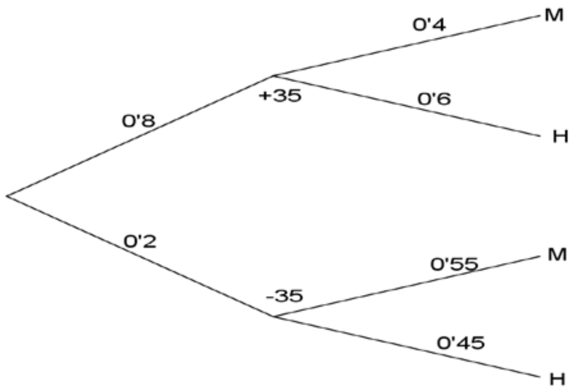
En un colectivo de personas, el 80% tiene más de 35 años. De los mayores de 35 años, el 40% son mujeres. De los que no han superado los 35 años, el 45% son hombres.
Se elige una persona, al azar, de ese colectivo.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya superado los 35 años sabiendo que se ha elegido un hombre?

Solución

En un colectivo de personas, el 80% tiene más de 35 años. De los mayores de 35 años, el 40% son mujeres. De los que no han superado los 35 años, el 45% son hombres.
Se elige una persona, al azar, de ese colectivo.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Llamemos M, H, +35 y -35, a los sucesos siguientes, “ser mujer”, “ser hombre”, "mayor de 35", y "no han superado los 35 años", respectivamente.
Datos del problema p(+35) = 80% = 0’8; p(M/+35) = 40% = 0’4; p(H/-35) = 045% = 0’45.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Usando el Teorema de la Probabilidad total
p(Mujer) = p(M) = p(+35).p(M/+35) + p(-35).p(M/-35) = 0’8·0’4 + 0’2·0’55 **= 0’43**
b)
¿Cuál es la probabilidad de que no haya superado los 35 años sabiendo que se ha elegido un hombre?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(-35/H) =} \frac{p(-35 \cap H)}{p(H)} = \frac{p(-35)\cdot p(H/-35)}{1 - p(M)} = (0'2)\cdot(0'45)/(1 - 0'43) \mathbf{= 3/19 \cong 0'15799.}$$

EJERCICIO 3_A

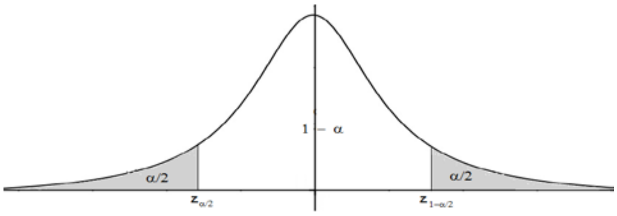
Parte II

Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1’75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0’2 m.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional de la talla de los estudiantes.
b) (1 punto) ¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1'73, 1'77) para la media poblacional?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1'75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0'2 m.

a)

Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional de la talla de los estudiantes.

Datos del problema: σ = 0'2, n = 100, $\overline{x}$ = 1'75, nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'10, es decir α/2 = 0'10/2 = 0'05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, y que una de las más próximas es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1'75 - 1'64\cdot\frac{0'2}{\sqrt{100}}, 1'75 + 1'64\cdot\frac{0'2}{\sqrt{100}}\right) \cong \mathbf{(1'7172,\ 1'7828).}$$

b)

¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1'73, 1'77) para la media poblacional?

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (1'73,1'77), σ = 0'2, n = 100.

De la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (1'77 – 1'73) = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{0'2}{\sqrt{100}}$, es decir $\mathbf{z_{1-\alpha/2}}$ = 0'04·10/0'4 **= 1** y mirando en las tablas vemos que p(Z ≤ 1'00) = 1 - α/2 = 0'8413, por lo tanto tenemos que α = (1 – 0'8413)·2 = 0'3174, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0'3174 = = 0'6826 = 68'26%.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.
b) (1'5 puntos) Calcule A^{-1} para m = 2.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$

a)
Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ tiene inversa A^{-1} si su determinante det(A) = |A| es distinto de cero.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3+C_1 \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Aduntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix}$ $= 1\cdot[m\cdot(1-m) - (-6)\cdot 1] = -m^2 + m + 6$.

De |A| = 0, tenemos $m^2 - m - 6 = 0$, es decir $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4\cdot 6}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, luego m = 3 y m = -2, por tanto

$|A| \neq 0$ si $m \neq 3$ y $m \neq -2$, es decir existe A^{-1} si $m \neq 3$ y $m \neq -2$.

b)
Calcule A^{-1} para m = 2.

En nuestro caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. La fórmula de A^{-1} es $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3+C_1 \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Aduntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix}$ $= 1\cdot(-2+6) = 4 \neq 0$, luego existe A^{-1};

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{A^{-1}} = (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -3/2 & -1/4 & 3/2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función:

$$B(x) = -0'01x^2 + 3'6x - 180.$$

a) (1 punto) Represente gráficamente esta función.
b) (1 punto) Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
c) (1 punto) Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución

El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función:

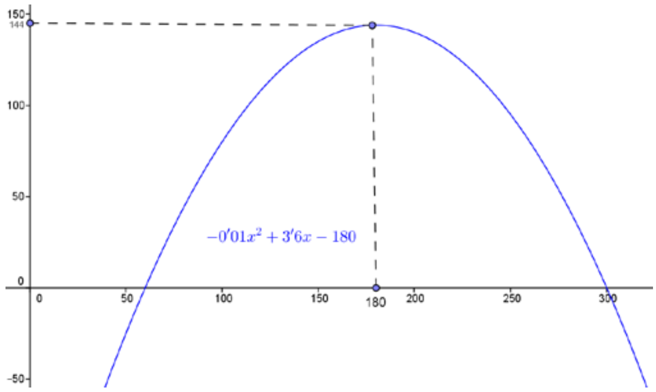
$$B(x) = -0'01x^2 + 3'6x - 180.$$

a)
Represente gráficamente esta función.

La gráfica de $B(x) = -0'01x^2 + 3'6x - 180$, es una parábola que tiene las ramas hacia abajo (∩), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo; abscisa de su vértice V en $B'(x) = 0 = -0'02x + 3'6 \rightarrow x = 180$, es decir su vértice es V(180, f(180)) = V(180,144). Sus cortes con los ejes son:
Para x = 0, punto (0,-180).

Para $B(x) = 0 = -0'01x^2 + 3'6x - 180 \rightarrow x^2 - 360x + 18000 \rightarrow x = \dfrac{360 \pm \sqrt{360^2 - 4\cdot 18000}}{2} = \dfrac{360 \pm 240}{2}$, de donde x = 60 y x = 300 → puntos (60,0) y (300,0).
Me han dicho que la dibuje en [0,45]

Un esbozo del trozo de parábola es:



b)
Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

El beneficio es máximo en el vértice V(180,144) es decir **el máximo beneficio es 144 y se obtiene vendiendo 180 kg del artículo.**
c)
Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

La empresa no tiene pérdidas si la gráfica de la parábola se encuentra por encima del eje de abscisas es decir entre los valores x = 60 y x = 300, como me dicen el máximo valor, **la empresa no tiene pérdidas si produce como máximo 300 kg del artículo.**

EJERCICIO 3_B

Parte I
De una bolsa que contiene 4 monedas de 2 euros, 5 de 1 euro y 3 de 0'20 euros, se extraen dos monedas, al azar, sucesivamente y sin devolverlas a la bolsa.
a) (1'5 puntos) Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
A = "la suma de las dos monedas es inferior a 2'20 euros".
B = "al menos una de las dos monedas es de 0'20 euros".
b) (0'5 puntos) Razone si esos dos sucesos son independientes.

Solución

De una bolsa que contiene **4** monedas de 2 euros, **5** de 1 euro y **3** de 0'20 euros, se extraen dos monedas, al azar, sucesivamente y sin devolverlas a la bolsa.
a)
Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
A = "la suma de las dos monedas es inferior a 2'20 euros".
B = "al menos una de las dos monedas es de 0'20 euros".

Recordamos que extraer dos monedas es lo mismo que extraer primero una moneda y después la otra.
Llamemos 2_1, 2_2, 1_1, 1_2, $0'2_1$ y $0'2_2$, a los sucesos siguientes, "sacar 2 € en la 1ª extracción", "sacar 2 € en la 2ª extracción", "sacar 1 € en la 1ª extracción", "sacar 1 € en la 2ª extracción", "sacar 0'2 € en la 1ª extracción" y "sacar 0'2 € en la 2ª extracción", respectivamente.

Datos del problema $p(2_1) = 4/12$; $p(2_2/2_1) = 3/11$; $p(2_2/\text{otro caso}) = 4/11$, $p(1_1) = 5/12$; $p(1_2/1_1) = 4/11$, $p(1_2/\text{otro caso}) = 5/11$; $p(0'2) = 3/12$, $p(0'2_2/0'2_1) = 2/11$; $p(0'2_2/\text{otro caso}) = 3/11$.

A = "la suma de las dos monedas es inferior a 2'20 euros", esto se puede hacer no extrayendo nunca monedas de 2€ luego los casos son A = $\{1_1\text{-}1_2,\ 0'2_1\text{-}0'2_2,\ 1_1\text{-}0'2_2,\ 0'2_1\text{-}1_2\}$, luego:
p(A) = $p(1_1\text{-}1_2) + p(0'2_1\text{-}0'2_2) + p(1_1\text{-}0'2_2) + p(0'1_1\text{-}1_2) =$
$= p(1_1)\cdot p(1_2/1_1) + p(0'2)\cdot p(0'2_2/0'2_1) + p(1_1)\cdot p(0'2_2/\text{otro caso}) + p(0'2_1)\cdot p(1_2/\text{otro caso}) =$
$= (5/12)\cdot(4/11) + (3/12)\cdot(2/11) + (5/12)\cdot(3/11) + (3/12)\cdot(5/11)$ **= 14/33 ≅ 0'4242**.
A = "al menos una de las dos monedas es de 0'20 euros", luego los casos son B = $\{0'2_1\text{-}1_2,\ 0'2_1\text{-}0'2_2,\ 0'2_1\text{-}2_2,\ ,\ 1_1\text{-}0'2_2,\ 2_1\text{-}0'2_2\}$, luego:
p(B) = $p(0'2_1\text{-}1_2) + p(0'2_1\text{-}0'2_2) + p(0'2_1\text{-}2_2) + p(1_1\text{-}0'2_2) + p(2_1\text{-}0'2_2) =$
$= p(0'2_1)\cdot p(1_2/\text{otro caso}) + p(0'2)\cdot p(0'2_2/0'2_1) + p(0'2_1)\cdot p(2_2/\text{otro caso}) + p(1_1)\cdot p(0'2_2/\text{otro caso}) +$
$+ p(2_1)\cdot p(0'2_2/\text{otro caso}) = (3/12)\cdot(5/11) + (3/12)\cdot(2/11) + (3/12)\cdot(4/11) + (5/12)\cdot(3/11) + (4/12)\cdot(3/11) =$
= 5/11 ≅ 0'4546.
b)
Razone si esos dos sucesos son independientes.

A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B)
A = {1_1-1_2, **$0'2_1$-$0'2_2$**, **1_1-$0'2_2$**, **$0'2_1$-1_2**}
B = {**$0'2_1$-1_2**, **$0'2_1$-$0'2_2$**, $0'2_1$-2_2, **1_1-$0'2_2$**, 2_1-$0'2_2$}
A∩B = {$0'2_1$-$0'2_2$, 1_1-$0'2_2$, $0'2_1$-1_2}
Luego **p(A∩B)** = p($0'2_1$-$0'2_2$) + p(1_1-$0'2_2$) + p($0'2_1$-1_2) = (3/12)·(2/11) + (5/12)·(3/11) + (3/12)·(5/11) **= 3/11.**

Como p(A∩B) = **3/11** ≠ p(A)·p(B) = **(14/33)·(5/11), los sucesos A y B no son independientes.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

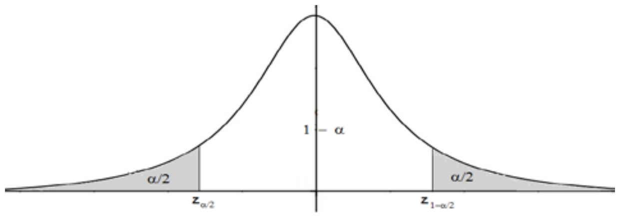
(2 puntos) El peso de los peces adultos que se crían en una piscifactoría se distribuye según una ley Normal con desviación típica 9 g.
Los pesos, en gramos, de una muestra aleatoria de 9 peces adultos de esa piscifactoría son:

310, 311, 309, 295, 280, 294, 303, 305, 293.

Determine un intervalo de confianza, al 95%, para el peso medio de los peces adultos de esa piscifactoría.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

El peso de los peces adultos que se crían en una piscifactoría se distribuye según una ley Normal con desviación típica 9 g.
Los pesos, en gramos, de una muestra aleatoria de 9 peces adultos de esa piscifactoría son:

310, 311, 309, 295, 280, 294, 303, 305, 293.

Determine un intervalo de confianza, al 95%, para el peso medio de los peces adultos de esa piscifactoría.

Datos del problema: σ = 9, n = 9, $\overline{x}$ = (310+311+309+295+280+294+303+305+293)/9 = 300, nivel de confianza = 95% = 0'95 = = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(300 - 1'96\cdot\frac{9}{\sqrt{9}}, 300 - 1'96\cdot\frac{9}{\sqrt{9}}\right)$$ **= (294'12, 305'88).**