OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

Solución

Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

x = Precio del litros de leche.
y = Precio del kg de jamón.
z = Precio del litros de aceite.

De "156 € por 24 litros de leche, 6 kg de jamón y 12 litros de aceite" $\rightarrow$ $24x + 6y + 12z = 156$.
De "un litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche" $\rightarrow$ $z = 3x$.
De "un kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche" $\rightarrow$ $y = 4z + 4x$.

Sustituyendo tenemos:
$4x + 6(4z + 4x) + 12(3x) = 156 \rightarrow 24x + 6(4(3x) + 4x) + 12(3x) = 156 \rightarrow 24x + 6(16x) + 36x = 156 \rightarrow$
$\rightarrow 24x + 96x + 36x = 156 \rightarrow 156x = 156$, de donde **$x = 1$, $z = 3$** e **y** $= 4(3) + 4(1)$ **$= 16$**. **Es decir el litro de leche cuesta 1€, el kg de jamón 16€ y el litro de aceite 3€**.

EJERCICIO 2_A

Sea $f(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9 & \text{si } 3 \le t \le 5 \\ 2t + 16 & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $t = 3$ y $t = 5$.
b) (1 punto) Razone si f posee algún punto de inflexión y calcúlelo, en caso afirmativo.

Solución

Sea $f(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9 & \text{si } 3 \le t \le 5 \\ 2t + 16 & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $t = 3$ y $t = 5$.

$-t^3 + 5t^2$ es continua y derivable en R, en particular en $0 < t < 3$.
$-t^2 + 12t - 9$ es continua y derivable en R, en particular en $3 < t < 5$.
$2t + 16$ es continua y derivable en R, en particular en $3 < t < 5$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en $t = 3$ y $t = 5$.
f(t) es continua en $t = 3$ si $f(3) = \lim_{t\to 3^-} f(t) = \lim_{t\to 3^+} f(t)$.
$\lim_{t\to 3^-} f(t) = \lim_{t\to 3^-} (-t^3 + 5t^2) = -(3)^3 + 5(3)^2 = 18$;
$f(3) = \lim_{t\to 3^+} f(t) = \lim_{t\to 3^+} (-t^2 + 12t - 9) = -(3)^2 + 12(3) - 9 = 18$, por tanto **f(t) es continua en $t = 3$**.

f(t) es continua en $t = 5$ si $f(5) = \lim_{t\to 5^-} f(t) = \lim_{t\to 5^+} f(t)$.
$f(5) = \lim_{t\to 5^-} f(t) = \lim_{t\to 5^-} (-t^2 + 12t - 9) = -(5)^2 + 12(5) - 9 = 26$;
$\lim_{t\to 5^+} f(t) = \lim_{t\to 5^+} (2t + 16) = 2(5) + 16 = 26$, por tanto **f(t) es continua en $t = 5$**.
Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9 & \text{si } 3 \le t \le 5 \\ 2t + 16 & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases}$, tenemos $f'(t) = \begin{cases} -3t^2 + 10t & \text{si } 0 < t < 3 \\ -2t + 12 & \text{si } 3 < t < 5 \\ 2 & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$'

f(t) es derivable en t = 3 si $\lim_{t\to 3^-} f'(t) = \lim_{t\to 3^+} f'(t)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{t\to 3^-} f(t) = \lim_{t\to 3^-} (-3t^2 + 10t) = -3(3)^2 + 10(3) = 3$; $\lim_{t\to 3^+} f(t) = \lim_{t\to 3^+} (-2t + 12) = -2(3) + 12 = 6$. Como los resultados no coinciden, **f(t) no es derivable en t = 3.**

f(t) es derivable en t = 5 si $\lim_{t\to 5^-} f'(t) = \lim_{t\to 5^+} f'(t)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{t\to 5^-} f(t) = \lim_{t\to 5^-} (-2t + 12) = -2(5) + 12 = 2$; $\lim_{t\to 5^+} f(t) = \lim_{t\to 5^+} (2) = 2$. Como los resultados coinciden, **f(t) es derivable en t = 5.**

Recapitulando **f es derivable e R – {3}**. Luego $f'(t) = \begin{cases} -3t^2 + 10t & \text{si } 0 < t < 3 \\ -2t + 12 & \text{si } 3 < t \le 5 \\ 2 & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$.

b)
Razone si f posee algún punto de inflexión y calcúlelo, en caso afirmativo.

Sabemos que los puntos de inflexión anulan la segunda derivada f''(t).

Como $f''(t) = \begin{cases} -6t + 10 & \text{si } 0 < t < 3 \\ -2 & \text{si } 3 < t < 5 \\ 0 & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$, vemos que la única rama que se puede igualar a cero es la primera,

es decir $-6t + 10 = 0$, de donde $t = 5/3 \cong 1'67$, que está entre 0 y 3.
Como $f''(1) = -6(1) + 10 = 4 > 0$, f es convexa ($\cup$) en el intervalo (0,5/3).
Como $f''(2) = -6(2) + 10 = -2 < 0$, f es cóncava ($\cap$) en el intervalo (5/3,3).
Por definición **x = 5/3 es un punto de inflexión de f que vale f(5/3)** $= -(5/3)^3 + 5(5/3)^2$ **= 250/27.**
En las otras dos ramas la segunda derivada no cambia de signo, luego no hay más puntos de inflexión.

EJERCICIO 3_A

Parte I

Los alumnos de Bachillerato de un I.E.S. proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.El 50% de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.
a) (1 punto) Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S., ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?
b) (1 punto) Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S. y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B?

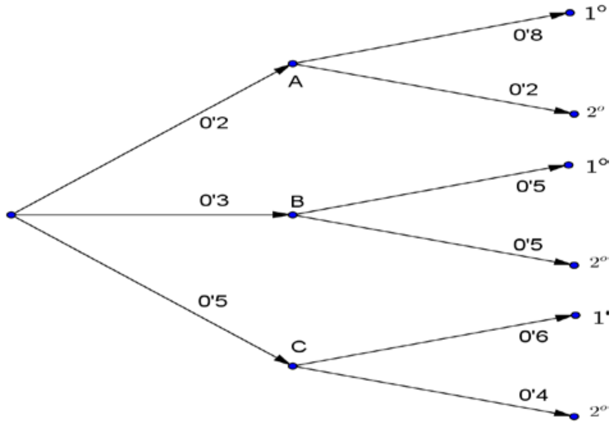
Solución

Los alumnos de Bachillerato de un I.E.S. proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.El 50% de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.
a)
Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S., ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?

Llamemos A, B, C, 1º y 2º, a los sucesos siguientes, "procede localidad A", "procede localidad B", "procede localidad C", "cursa 1º de Bachi." y "cursa 2º de Bachi.", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 20% = 0'2, p(B) = 30% = 0'3, p(1º/A) = 80% = 0'8, p(1º/B) = 50% = 0'5, y p(1º/C) = 60% = 0'6,.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(2º) = $p(O_1^C \cap O_2^C)$ = p(A)·p(2º/A) + p(B)·p(2º/B) + p(C)·p(2º/C) =
= (0'2)·(0'2) + (0'3)·(0'5) + (0'5)·(0'4) **= 0'39.**
b)
Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S. y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B?

Utilizando la fórmula de Bayes

p(B/1ª) = $\dfrac{p(B \cap 1^o)}{p(1^o)} = \dfrac{p(B)\cdot p(1^o/B)}{1 - p(2^o)}$ = (0'3·0'5)(1 – 0'39) **= 15/61 ≅ 0'2459.**

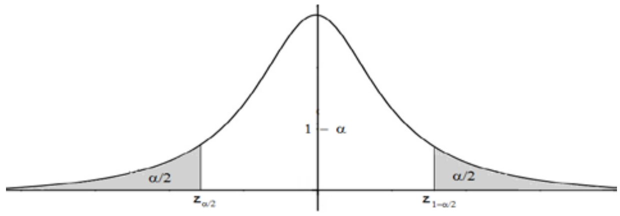
EJERCICIO 3_A

Parte II

Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 cm.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población.
b) (1 punto) Calcule el mínimo tamaño de muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 95%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de 176 cm.

a)

Obtenga un intervalo, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población.

Datos del problema: σ = 6; n = 225, $\overline{x}$ = 176, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de las mas próximas es 0'9949, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'57, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(176 - 2'57\cdot\frac{6}{\sqrt{225}}, 176 + 2'57\cdot\frac{6}{\sqrt{225}}\right) = \mathbf{(174'972,\ 177'028).}$$

b)

Calcule el mínimo tamaño de muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: σ = 6, error = E ≤ 1, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96\cdot 6}{1}\right)^2$ = 138'2976, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 139**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el sistema de inecuaciones siguiente: x + y ≤ 120; 3y ≤ x; x ≤ 100; y ≥ 10.

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) (1 punto) ¿En qué punto de esa región, F(x,y) = 25x + 20y alcanza el máximo?

Solución

Sea el sistema de inecuaciones siguiente: x + y ≤ 120; 3y ≤ x; x ≤ 100; y ≥ 10.

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

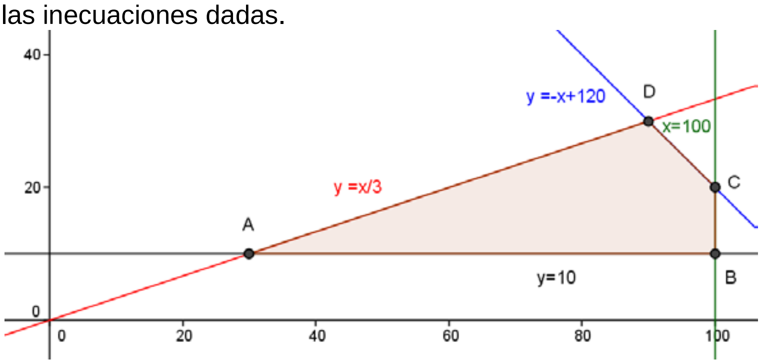
b) ¿En qué punto de esa región, F(x,y) = 25x + 20y alcanza el máximo?

(a) y (b)

Las desigualdades x + y ≤ 120; 3y ≤ x; x ≤ 100; y ≥ 10, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, x + y = 120; 3y = x; x = 100; y = 10.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos y = -x + 120; y = x/3; x = 100; y = 10.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = 10 e y = x/3, tenemos 10 = x/3, luego 30 = x, y el vértice es A(30,10).

De y = 10 y x = 100, tenemos el vértice es B(100,10).

De x = 100 e y = -x+120, tenemos y = 20, y el vértice es C(100,20).

De y = -x+120 e y = x/3, tenemos -x+120 = x/3 → -3x+360 = x → 360 = 4x, luego 90 = x e y = 30, y el vértice es D(90,30).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(30,10), B(100,10), C(100,20) y D(90,30).

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(30,10), B(100,10), C(100,20) y D(90,30). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(30,10) = 25(30) + 20(10) = 950; F(100,10) = 25(100) + 20(10) = 2700;
F(100,20) = 25(100) + 20(20) **= 2900**; F(90,30) = 25(90) + 20(30) = 2850.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2900** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(10,20).**

EJERCICIO 2_B

Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra.

Sea $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+1}$, con $x \geq 0$, la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.

a) (2 puntos) Represente la función f .

b) (0'5 puntos) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?

c) (0'5 puntos) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

Solución

Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra.

Sea $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+1}$, con $x \geq 0$, la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.

a)

Represente la función f .

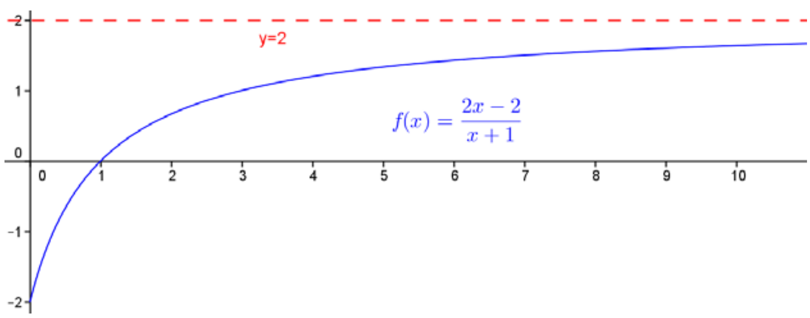
Tenemos $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{2x+2-4}{x+1} = \dfrac{2x-2}{x+1}$, cuya gráfica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H. Como lo han definido para $x \geq 0$, vemos que $f(0) = -2$.

El número que anula el denominador (x + 1 = 0) es x = -1, y como $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{2x-2}{x+1} = (-4)/0^+ = -\infty$, *la recta x = -1 es una A.V. de f, pero no está es el dominio, aunque nos indica de donde proviene la gráfica, y que f es estrictamente creciente* $(\nearrow)$*, pues vendría desde* $-\infty$ *hasta f(0) = -2.*

Como $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x-2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} (2x/x) = \lim_{x\to +\infty} (2/1) = 2$, **la recta y = 2 es una A.H. en +∞.**

De $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-2}{x+1} - (2)\right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. y = 2 en + ∞.

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



b)

¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?

Observando la gráfica, vemos que empieza a estar por encima del eje de abscisas OX en x = 1, es decir **a partir de 1€ la empresa comienza a tener beneficios.**

c)

¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

Observando la gráfica, vemos que están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa porque no supera la A.H. y = 2, es decir **las ganancias están limitadas a 2000€.**
Observando la gráfica, vemos que f(0) = -2, es decir **las perdidas están limitadas a -2000€.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

Según la estadística de los resultados en las Pruebas de Acceso en una provincia andaluza, en septiembre de 2001, el número de alumnas presentadas es 840, de las que han aprobado un 70%, mientras que el número de alumnos presentados es 668, habiendo aprobado un 75% de éstos.
a) (1 punto) Elegida, al azar, una persona presentada a las Pruebas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?
b) (1 punto) Sabiendo que una persona ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?

Solución

Según la estadística de los resultados en las Pruebas de Acceso en una provincia andaluza, en septiembre de 2001, el número de alumnas presentadas es 840, de las que han aprobado un 70%, mientras que el número de alumnos presentados es 668, habiendo aprobado un 75% de éstos.

Llamemos V, M, A y A^C, a los sucesos siguientes, "varón", "mujer", "aprobar", y "no aprobar", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada. La suma de los totales coincide), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).
También se podría hacer por un diagrama de árbol.

	Varón = V	Mujer = M	Totales
Aprobar = A	75% de 668 = = 0'75·668 = 501	70% de 840 = = 0'7·840 = 588	
No aprobar = A^C			
Totales	668	840	

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Varón = V	Mujer = M	Totales
Aprobar = A	501	588	**1089**
No aprobar = A^C	**167**	**252**	**419**
Totales	668	840	**1508**

a)
Elegida, al azar, una persona presentada a las Pruebas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?

p(Aprobar) = p(A) = $\frac{\text{Total aprobados}}{\text{Total presentados}}$ **= 1089/1508 ≅ 0'72215**.

b)
Sabiendo que una persona ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?

p(si aprueba, ¿es varón?) = p(V/A) = $\frac{p(V \cap A)}{p(A)} = \frac{\text{Total varones y aprobados}}{\text{Total aprobados}}$ **= 501/1089 ≅ 0'46001.**

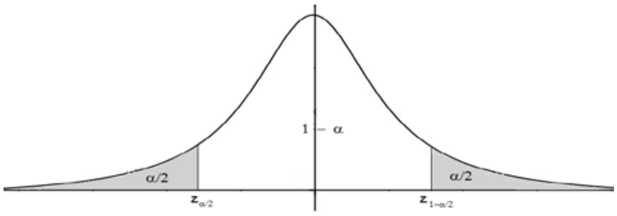
EJERCICIO 3_B

Parte II

Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media μ horas y desviación típica σ = 2 horas.
a) (1 punto) A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7'26, 8'14) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.
b) (1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0'75 horas, con un nivel de confianza del 98%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>*media*</u> *es* $\overline{x} = (a + b)/2$*, el* <u>*error máximo*</u> *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es* $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$*, de donde* $E = (b - a)/2$*, por tanto el* <u>*tamaño mínimo*</u> *de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$*.*

Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 2$ horas.

a)

A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7’26, 8’14) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (7’26, 8’14), $\sigma = 2$, n = 64.

De la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que $(8'14 - 7'26) = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{2}{\sqrt{64}}$, es decir

$\mathbf{z_{1-\alpha/2}} = (0'88)\cdot 8/4 = \mathbf{1'76}$ y mirando en las tablas vemos que $p(Z \le 1'76) = 1 - \alpha/2 = 0'9608$, por lo tanto tenemos que $\alpha = (1 - 0'9608)\cdot 2 = 0'0784$, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0’0784 = = 0’9216 = 92’16%.**

b)

Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0’75 horas, con un nivel de confianza del 98%.

Datos del problema: $\sigma = 2$, $E \le 0'75$, nivel de confianza = 98% = 0’98 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'02$, es decir $\alpha/2 = 0'02/2 = 0'01$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’99 no viene, y que la más próxima es 0’9901, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'33$

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'33\cdot 2}{0'75}\right)^2 \cong 38'606$, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 39**.