OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$

Calcule x, y, z, sabiendo que A·B = 2C - D.

Solución

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$. Calcule x, y, z, sabiendo que A·B = 2C - D.

Como la matriz A no es cuadrada, no tiene inversa por tanto tenemos que efectuar las operaciones de matrices que nos han dado e igualarla al final miembro a miembro.

$A\cdot B = \begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\x\end{pmatrix}$; $2C - D = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-z\\2-z\\-z\end{pmatrix}$.

De A·B = 2C – D, tenemos $\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-z\\2-z\\-z\end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro:

$3x + y = 2 - z$
$x +3y = 2 - z$
$x = - z$. Sustituyendo en la 1ª y 2ª tenemos
$3(-z) + y = 2 - z \rightarrow y = 2 + 2z$
$(-z) +3y = 2 - z \rightarrow 3y = 2$, de donde **y = 2/3**, Entrando en la anterior $2/3 = 2 + 2z \rightarrow 2/3 - 2 = 2z$, de donde **z = -2/3** y **x =** -(-2/3) = **2/3.**

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Represéntela gráficamente.
b) (1’5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.
c) (0’5 puntos) ¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

Solución

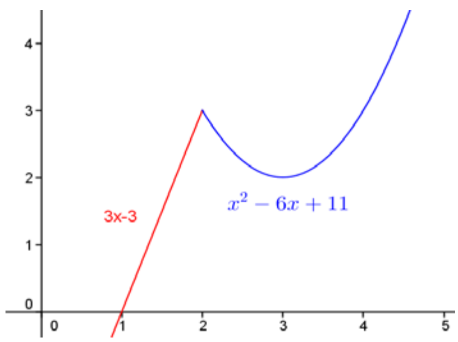
Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a)
Represéntela gráficamente.

La gráfica de $3x - 3$ es una recta con pendiente positiva $(\nearrow)$ que no pasa por el origen, pero sólo la dibujamos a partir de x ≥ 2, es decir una semirrecta. En x = 2 vale 3.

La gráfica de $x^2 - 6x + 11$ es una parábola con las ramas hacia arriba ∪ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con vértice V de abscisa la solución de f’(x) = 0 = 2x – 6, de donde x = 3 y V(3,f(3)) = (3,2), pasando por los puntos $(2^+,3)$ y (4,3).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b)
Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.

Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.
Observando su gráfica vemos que es continua en x = R, en particular en x = 2, no derivable en x = 2, tiene un máximo relativo en x = 2 (no derivable) que vale 3 y un mínimo relativo en x = 3 que vale 2.
Veámoslo analíticamente.

3x - 3 es continua y derivable en R, en particular en x < 2.
$x^2 - 6x + 11$ es continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.
$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x - 3) = 3(2) - 3 = 3;$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 6x + 11) = (2)^2 - 6(2) + 12 = 3$, por tanto **f(x) es continua en x = 3**.

Recapitulando **f es continua en R**.
De $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (3) = 3;$ $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 6) = 2(2) - 6 = -2$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 2.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
Recapitulando **f es derivable en R – {2}.**
Recordamos que la monotonía es el estudio de la 1ª derivada
Si x < 2, f'(x) = 3 > 0, luego f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,2)$.
Si x > 2, f'(x) = 2x – 6. De f'(x) = 0 → 2x – 6 = 0 → x = 3, posible extremo relatico.
Como f'(2'5) = 2(2'5) - 6 = - 1 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (2,3).
Como f'(4) = 2(4) - 6 = 2 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(3,+\infty)$.
Por definición **x = 2 es un máximo relativo y vale f(2) = 3**.
Por definición **x = 3 es un mínimo relativo y vale f(3) = 2**.
c)
¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

Observando la gráfica vemos que el punto de pendiente cuya recta tangente a su gráfica sea cero **es el vértice del trozo de parábola, es decir el punto (3,2), en él f'(3) = 0.**

EJERCICIO 3_A
Parte I
Una urna contiene 15 bolas, de las cuales 6 son azules y 9 son rojas. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento, 3 bolas, al azar.
a) (0'5 puntos) Describa el espacio muestral asociado al experimento.
b) (0'75 puntos) Determine la probabilidad de que se extraiga, al menos, una bola azul.
c) (0'75 puntos) Halle la probabilidad de que la tercera bola extraída sea roja.

Solución

Una urna contiene 15 bolas, de las cuales 6 son azules y 9 son rojas. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento, 3 bolas, al azar.
a)
Describa el espacio muestral asociado al experimento.

Llamemos A_1, A_2, A_3, R_1, R_2 y R_3, a los sucesos siguientes, "sacar bola azul en la 1ª extracción", "sacar bola azul en la 2ª extracción", "sacar bola azul en la 3ª extracción", "sacar bola roja en la 1ª extracción", "sacar bola roja en la 2ª extracción" y "sacar bola roja en la 3ª extracción", respectivamente.

Espacio muestral **E = {A_1-A_2-A_3; A_1-A_2-R_3; A_1-R_2-A_3; R_1-A_2-A_3; A_1-R_2-R_3; R_1-A_2-R_3; R_1-R_2-A_3; R_1-R_2-R_3}** hay 8 sucesos elementales.
b)
Determine la probabilidad de que se extraiga, al menos, una bola azul.

El suceso extraer al menos una bola azul es el contrario de extraer las tres bolas rojas.
p(al menos una bola azul) = $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 1 - (9/15)\cdot(8/14)\cdot(7/13)$ **= 53/65 ≅ 0'8154.**
c)
Halle la probabilidad de que la tercera bola extraída sea roja.

p(tercera bola roja) = $p(A_1 \cap A_2 \cap R_3) + p(A_1 \cap R_2 \cap R_3) + p(R_1 \cap A_2 \cap R_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) =$
$= (6/15)\cdot(5/14)\cdot(9/13) + (6/15)\cdot(9/14)\cdot(8/13) + (9/15)\cdot(6/14)\cdot(8/13) + (9/15)\cdot(8/14)\cdot(7/13)$ **= 3/5 = 0'6.**

EJERCICIO 3_A

Parte II
(2 puntos) En un pueblo habitan 700 hombres adultos, 800 mujeres adultas y 500 menores. De él se quiere seleccionar una muestra de 80 personas, utilizando, para ello, muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

Solución

En un pueblo habitan 700 hombres adultos, 800 mujeres adultas y 500 menores. De él se quiere seleccionar una muestra de 80 personas, utilizando, para ello, muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{700} = \frac{n_2}{800} = \frac{n_3}{500} = \frac{80}{2000}$.

De $\frac{n_1}{700} = \frac{80}{2000}$, tenemos $n_1 = \frac{80 \cdot 700}{2000}$ = **28 hombres adultos** en el primer estrato.

De $\frac{n_2}{800} = \frac{80}{2000}$, tenemos $n_2 = \frac{80 \cdot 800}{2000}$ = 3**2 mujeres adultas** en el segundo estrato.

De $\frac{n_3}{500} = \frac{80}{2000}$, tenemos $n_3 = \frac{80 \cdot 500}{2000}$ = **20 menores** en el tercer estrato. También se podría haber calculado restando al total de la muestra 80 el número de hombres 28 más el de mujeres 32, y nos quedarían 20 menores.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B.
La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2'7% y la de los B ha sido del 6'3%.
Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

Solución

Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B.
La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2'7% y la de los B ha sido del 6'3%.
Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

"x" = Número de fondos del tipo A.
"y" = Número de fondos del tipo B.

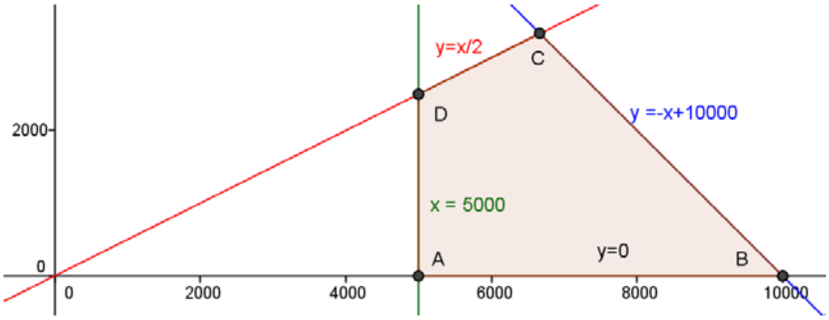
Función Objetivo **F(x,y) = 2’7x + 6’3y**. (La rentabilidad de los fondos A ha sido del 2’7% y del 6’3% el B).

Restricciones:

Dispone de 10000 € para invertir en fondos de dos tipos: A ó B → $x + y \le 10000$
La inversión en fondos A debe superar los 5000 € → $x \ge 5000$.
Ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B → $x \ge 2y$.
Se invierte en fondos tipo A y tipo B → $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $x + y \le 10000$; $x \le 5000$; $x \ge 2y$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x + y = 10000$; $x = 5000$; $x = 2y$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos
$y = -x + 10000$; $x = 5000$; $y = x/2$; $x = 0$; $y = 0$.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 5000$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(5000,0)
De $y = 0$ e $y = -x+10000$, tenemos el punto de corte es B(10000,0)
De $y = -x+10000$ e $y = x/2$, tenemos $-x+10000 = x/2$ → $-2x+20000 = x$ → $20000 = 3x$, luego $x = 20000/3$, y el punto de corte es C(20000/3,20000/6) = C(20000/3,10000/3).
De $y = x/2$ y $x = 5000$, tenemos el punto de corte es D(5000,2500)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(5000,0), B(10000,0), C(20000/3,10000/3) y D(5000,2500).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 2'7x + 6'3y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(5000,0), B(10000,0), C(20000/3,10000/3) y D(5000,2500). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(5000,0) = 2’7(5000) + 6’3(0) = 13500; F(10000,0) = 2’7(10000) + 6’3(0) = 27000;
F(20000/3,10000/3) = 2’7(20000/3) + 6’3(10000/3) **= 39000**; F(5000,2500) = 2’7(5000) + 6’3(2500) = 9750.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 39000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(20000/3,10000/3), es decir el máximo ingreso es de 390 € (**nos han dado el %, por tanto se desplaza la coma a la izquierda dos unidades en 39000**) y se alcanza invirtiendo 20000/3 fondos del tipo A y 10000/3 fondos del tipo B.**

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.
a) (2 puntos) Halle el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que en el punto (0,0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2,-16) es un punto de inflexión.
b) (1 punto) Para a = 1, b = 1 y c = 0, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = -2.

Solución

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

a)
Halle el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que en el punto (0,0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2,-16) es un punto de inflexión.

Como f tiene en el punto (0,0) un extremo (anula la 1ª derivada), tenemos que **f(0)=0** (por punto) y **f'(0)= 0** (por extremo).
Como f tiene un punto de inflexión (anula la 2ª derivada) en (2,-16), tenemos que **f(2) = -16** (por punto) y **f''(2) = 0** (por pto. de inflexión).

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

De $f(0) = 0$ $\rightarrow$ $a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) = 0$ $\rightarrow$ $0 = 0$, lo cual es cierto**.**
De $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ $3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0$ $\rightarrow$ $0 + c = 0$, de donde $\mathbf{c = 0.}$
De $f(2) = -16$ $\rightarrow$ $a(2)^3 + b(2)^2 + 0(0) = -16$ $\rightarrow$ $\mathbf{8a + 4b = -16.}$
De $f''(2) = 0$ $\rightarrow$ $6a(2) + 2b = 0$ $\rightarrow$ $12a + 2b = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{b = -6a}$. Entrando en la anterior tenemos:
$8a + 4(-6a) = -16$ $\rightarrow$ $-16a = -16$ $\rightarrow$ $\mathbf{a} = 16/16 \mathbf{= 1.}$ De $b = -6a$, tenemos $\mathbf{b = -6.}$
Los valores pedidos son a = 1, b = -6 y c = 0
b)
Para a = 1, b = 1 y c = 0, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = -2.

En este caso tenemos $f(x) = x^3 + x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$
La recta tangente en x = -2 es "$y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x - (-2))$".
$f(x) = x^3 + x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$ $\rightarrow$ $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 = -4$ y $f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) = 8$, y **la recta tangente pedida es $\mathbf{y - (-4) = 8\cdot(x + 2) = 8x + 16}$, es decir $\mathbf{y = 8x + 12}$.**

EJERCICIO 3_B
Parte I
Tenemos 3 estuches de lápices A, B y C. El estuche A tiene 9 lápices, de los cuales 3 son negros; el B contiene 7 lápices, de los cuales 2 son negros; el C contiene 5 lápices de los que 1 es negro.
a) (0'5 puntos) Si tomamos, al azar, un lápiz del estuche B, ¿cuál es la probabilidad de que sea negro?
b) (1'5 puntos) Si elegimos, al azar, uno de los 3 estuches y de éste tomamos, al azar, un lápiz, ¿cuál es la probabilidad de que no sea negro?

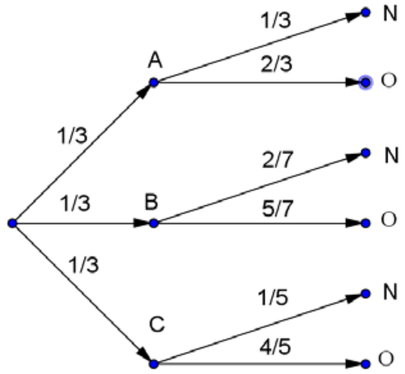
Solución

Tenemos 3 estuches de lápices A, B y C. El estuche A tiene 9 lápices, de los cuales 3 son negros; el B contiene 7 lápices, de los cuales 2 son negros; el C contiene 5 lápices de los que 1 es negro.
a)
Si tomamos, al azar, un lápiz del estuche B, ¿cuál es la probabilidad de que sea negro?

Llamemos A, B, C, N y O, a los sucesos siguientes, "estuche A", "estuche B", "estuche C", "lápiz color negro" y "lápiz de otro color", respectivamente.

Datos del problema $p(A) = p(B) = p(C) = 1/3$, $p(N/A) = 3/9 = 1/3$, $p(N/B) = 2/7$ y $p(N/C) = 1/5$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Nos piden **p(N/B) = 2/7**, pues ya elegimos el lápiz del estuche B
b)
Si elegimos, al azar, uno de los 3 estuches y de éste tomamos, al azar, un lápiz, ¿cuál es la probabilidad de

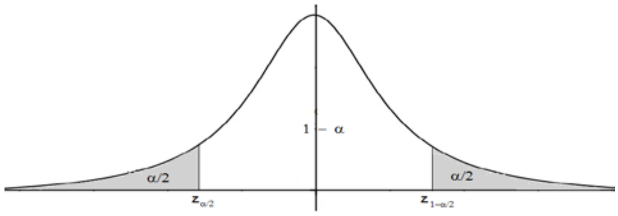
que no sea negro?

Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(O) = p(A)·p(O/A) + p(B)·p(O/B) + p(C)·p(O/C) = (1/3)·(2/3) + (1/3)·(5/7) + (1/3)·(4/5) **= 229/315 ≅ 0'727.**

EJERCICIO 3_B
Parte II
(2 puntos) El peso de los alumnos de un Instituto es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ, desconocida, y desviación típica 8 kg. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que permita estimar μ con un error máximo de 3 kg y un nivel de confianza del 99%?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

(2 puntos) El peso de los alumnos de un Instituto es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media μ, desconocida, y desviación típica 8 kg. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que permita estimar μ con un error máximo de 3 kg y un nivel de confianza del 99%?

Datos del problema: $\sigma = 8$, error = $E \le 3$, nivel de confianza = 99% = 0'99 = $1 - \alpha$, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de las más próximas es 0'9949, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'57.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot 8}{3}\right)^2$ = 46'968, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 47**.