OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: A·B, B·C, C·A.
b) (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial: A·X + B = C.

Solución

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a)
Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: A·B, B·C, C·A.

Para que se pueda realizar el producto A·B, el nº de columnas de A tiene que coincidir con el nº de filas de B, y el resultado tiene las filas de A y las columnas de B, es decir $A_{mx\mathbf{n}}\cdot B_{\mathbf{n}xp} = C_{mxp}$.

$A_{2x\mathbf{2}}\cdot B_{\mathbf{2}x3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

$B_{2x\mathbf{3}}\cdot C_{\mathbf{2}x3}$, no se puede hacer porque nº columnas de B, que es 3 no coincide con el nº de filas de C que es 2.

$C_{2x\mathbf{3}}\cdot A_{\mathbf{2}x2}$, no se puede hacer porque nº columnas de C, que es 3 no coincide con el nº de filas de A que es 2.

b)
Resuelva la ecuación matricial: A·X + B = C.

De A·X + B = C, tenemos A·X = C – B. Como A tiene inversa, A^{-1}, multiplicamos la expresión A·X = C – B por la izquierda por A^{-1}.

$A\cdot X = C - B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(C - B) \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(C - B) \rightarrow X = A^{-1}\cdot(C - B)$.

Calculamos las matrices $A^{-1} = (1/\det(A)).Adj(A^t)$

$\det(A) = |A| = -4 - (-3) = -1 \neq 0$, luego existe A^{-1}.

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

$C - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto $X = A^{-1}\cdot(C - B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 \\ -11 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = (1/3)x^3 - x^2 - 3x + 4$.
a) (1 punto) Represente gráficamente su función derivada determinando los puntos de corte con el eje de abscisas y su vértice.
b) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a $y = -3x + 3$.
c) (1 punto) Calcule los máximos y mínimos de f.

Solución

Sea la función $f(x) = (1/3)\,x^3 - x^2 - 3x + 4$.

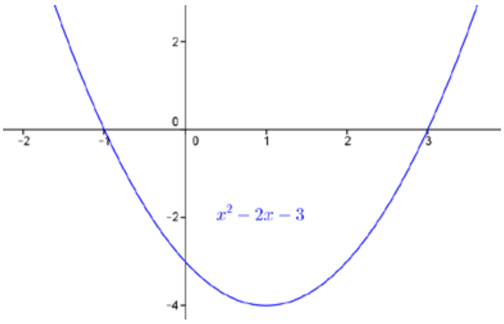
a)
Represente gráficamente su función derivada determinando los puntos de corte con el eje de abscisas y su vértice.

De $f(x) = (1/3)\,x^3 - x^2 - 3x + 4$ tenemos $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

La gráfica de $f'(x) = x^2 - 2x - 3$, es un parábola, que tiene las ramas hacia arriba ($\cup$), porque el nº que multiplica a x^2 es positivo, con vértice en la abscisa en x = 1 ($f''(x) = 2x-2=0 \rightarrow x = 1$), es decir V(1,-4) que sabemos es un mínimo.

Corta al eje de ordenadas OY en el punto (0,-3) y al eje de abscisas en los puntos (-1,0) y (3,0), puesto que x = -1 y x =3 son las soluciones de $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Un esbozo de la gráfica de f' es:



b)
Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a y = −3x + 3.

Sabemos que si las rectas son paralelas las pendientes coinciden.
La pendiente genérica de f(x) es $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.
La pendiente de la recta $y = -3x + 3$ es $y' = -3$.
Igualando tenemos $x^2 - 2x - 3 = -3 \rightarrow x^2 - 2x = 0 = x(x-2)$, de donde x = 0 y x = 2.
Los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a y = −3x + 3, son:
$(0,f(0)) = (0, (1/3)(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + 4) =$ **(0,4) y** $(2,f(2)) = (2, (1/3)(2)^3 - (2)^2 - 3(2) + 4) =$ **(2,-10/3).**
c)
Calcule los máximos y mínimos de f.

Recordamos que los extremos relativos anulan la primera derivada, f'(x).
Si f'(a) = 0 y f''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo y vale f(a).
Si f'(a) = 0 y f''(a) < 0, x = a es un máximo relativo y vale f(a).

Calculamos f'(x) y resolvemos la ecuación f'(x) = 0.
$f'(x) = x^2 - 2x - 3$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, cuyas soluciones son x = -1 y x = 3, que serán los posibles extremos relativos.
$f'(x) = x^2 - 2x - 3$; $f''(x) = 2x - 2$

Como f'(-1) = 0 y f''(-1) = 2(-1) - 2 = -4 < 0, **x = -1 es un máximo relativo y vale f(-1) = 17/3.**
Como f'(3) = 0 y f''(3) = 2(3) - 2 = 4 > 0, **x = 3 es un mínimo relativo y vale f(3) = -5.**

EJERCICIO 3_A

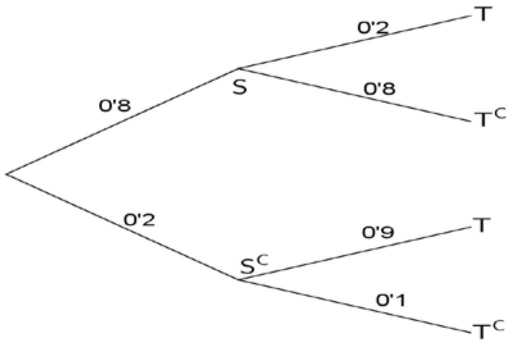
Parte I
El despertador de Pedro no funciona bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Pedro llega tarde a clase con probabilidad 0'2; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0'9.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que Pedro llegue a tiempo.
b) (1 punto) Determine la probabilidad de que el despertador haya funcionado bien, si sabemos que Pedro ha llegado tarde a clase.

Solución

El despertador de Pedro no funciona bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Pedro llega tarde a clase con probabilidad 0'2; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0'9.
a)
Calcule la probabilidad de que Pedro llegue a tiempo.

Llamemos S, S^C, T y T^C, a los sucesos siguientes, "sonar el despertador", "no sonar el despertador", "llegar tarde", y "no llegar tarde ", respectivamente.
Datos del problema $p(S^C) = 20\% = 0'2$; $p(T/S) = 0'2$; $p(T/S^C) = 0'9$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Usando el Teorema de la Probabilidad total

p(Llegue a tiempo) = $p(T^C) = p(S).p(T^C/S) + p(S^C).p(T^C/S^C)$ = 0'8·0'8 + 0'2·0'1 **= 0'66**

b)

Determine la probabilidad de que el despertador haya funcionado bien, si sabemos que Pedro ha llegado tarde a clase.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(S/T) =} \frac{p(S\cap T)}{p(T)} = \frac{p(S)\cdot p(T/S)}{1 - p(T^C)} = (0'8)\cdot(0'2)/(1 - 0'66) \mathbf{= 8/17 \cong 0'4706.}$$

EJERCICIO 3_A

Parte II

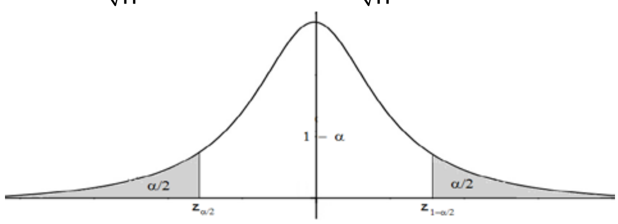
El gasto mensual de los estudiantes de un Instituto se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 4 euros. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es 2'17 euros.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

b) (0'5 puntos) Calcule el gasto mensual medio de la muestra tomada sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza es 83'915 euros.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

El gasto mensual de los estudiantes de un Instituto se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 4 euros. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es 2'17 euros.

a)

¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?

Datos del problema: $\sigma = 4$, amplitud = b - a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2'17, nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, es decir $\alpha/2$ = 0'03/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De $n \ge \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 2'17\cdot 4}{2'17}\right)^2$ = 64, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 64**.

b)
Calcule el gasto mensual medio de la muestra tomada sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza es 83'915 euros.

Datos del problema: $\sigma = 4$, a = $\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 83'915, $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, n = 64

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De $\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 83'915, tenemos que **el gast mensual medio es** $\overline{x}$ = 83'915 + $2'17\cdot\frac{4}{\sqrt{64}}$ **= 85€**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón. Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1'75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro. Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

Solución

Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón. Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1'75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro. Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

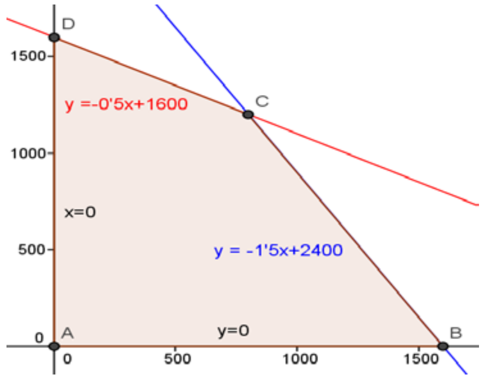
"x" = Número de tortas de almendra.
"y" = Número de tabletas de turrón.

Función Objetivo **F(x,y) = 1'75x + 1y**. (Vende cada torta a 1'75€, y por cada tableta de turrón a 1€).

Restricciones:
Hay 240 kg de almendra, cada torta de almendra necesita 150 g de almendra y cada tableta de turrón 100 g de almendra: $\rightarrow$ 0'15x + 0'1y $\le$ 240
Hay 160 kg de azúcar, cada torta de almendra necesita 50 g de azúcar y cada tableta de turrón 100 g de azúcar: $\rightarrow$ 0'05x + 0'1y $\le$ 160
Se hace alguna torta de almendras y alguna tableta de turrón $\rightarrow$ x ≥ 0, y ≥ 0.

Las desigualdades 0'15x + 0'1y $\le$ 240; 0'05x + 0'1y $\le$ 160; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, 0'15x + 0'1y = 240; 0'05x + 0'1y = 160; x = 0; y = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -0'15x/0'1 + 240/0'1 = -1'5x + 2400 ; y = -0'05x'1 + 160/0'1 = -0'5x + 1600 ; x = 0; y = 0.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De y = 0 e y = -1'5x+2400, tenemos 0 = -1'5x+2400 $\rightarrow$ 1'5x = 2400 $\rightarrow$ x = 1600, y el punto de corte es B(1600,0)
De y = -1'5x+2400 e y = -0'5x+1600, tenemos -1'5x+2400 = -0'5x+1600 $\rightarrow$ 800 = x, luego y = 1200 y el punto de corte es C(800,1200).
De y = -0'5x+1600 y x = 0, tenemos el punto de corte es D(0,1600)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(1600,0), C(800,1200) y D(0,1600).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 1'75x + 1y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(1600,0), C(800,1200) y D(0,1600). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 1'75(0) + 1(0) = 0; **F(1600,0)** = 1'75(1600) + 1(0) **= 2800**;
F(800,1200) = 1'75(800) + 1(1200) = 2600; F(0,1600) = 1'75(0) + 1(1600) = 1600.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2800** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(1600,0), es decir el máximo ingreso es de 2880 € y se alcanza elaborando 1600 tortas de almendra y ninguna tableta de turrón.**

EJERCICIO 2_B

Se considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 + a & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halle los valores de a para los que f es continua y derivable.
b) (1'5 puntos) Para a = 4, halle las asíntotas y extremos relativos.

Solución

Se considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 + a & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

a)
Halle los valores de a para los que f es continua y derivable.

Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.

(x-2)/x es continua y derivable en R - {0} (nº que anula el denominador), en particular en x < -1.
$-x^2$ + a es continua y derivable en R, en particular en -1 < x < 1.
(x+2)/x es continua y derivable en R - {0} (nº que anula el denominador), en particular en 1 < x.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = -1 y x = 1.

f(x) es continua en x = -1 si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x-2)/x = (-3)/(-1) = 3$;

$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (-x^2 + a) = -(-1)^2 + a = -1 + a$, por tanto f(x) es continua en x = -1, si 3 = -1 + a, de donde **a = 4**.

Veamos si para a = 4, f(x) es continua en x = 1 es decir si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 4) = -1 + 4 = 3$;

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+2)/x = (1+2)/1 = 3$, por tanto para a = 4, f(x) es continua en x = -1 y x = 1, luego es continua en R.

Veamos si para a = 4 f es derivable en x = -1 y x = 1

De $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2+4 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

f(x) es derivable en x = -1 si $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} 2/x^2 = 2/(-1)^2 = 2$; $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} (-2x) = -2(-1) = 2$. Como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = -1.**

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x) = -2(1) = -2$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -2/x^2 = -2/(1)^2 = -2$. Como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = 1.** Recapitulando **f es derivable en R.**

Luego $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

b)

Para a = 4, halle las asíntotas y extremos relativos.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2+4 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$, y tenemos $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

Sabemos que en los cocientes de polinomios **las asíntotas verticales** suelen ser los números que anulan el denominador, en nuestro caso x = 0, siempre que verifiquen que $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y que **las asíntotas horizontales** (es la misma en $\pm\infty$) y es $y = \lim_{x\to +\infty} f(x)$.

También sabemos **que las funciones polinómicas no tienen asíntotas**.

En nuestro caso si x < -1, f(x) = (x-2)/x

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2)/x = -2/0^- = +\infty$, luego x = 0, es una asíntota vertical, pero no está en el dominio.

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x-2)/x = \lim_{x\to -\infty} (1/1) = 1$, **la recta y = 1 es la asíntota horizontal en $-\infty$.**

Si 1 < x, f(x) = (x+2)/x

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)/x = +2/0^- = -\infty$, luego x = 0, es una asíntota vertical, pero no está en el dominio.

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x-2)/x = \lim_{x\to +\infty} (1/1) = 1$, **la recta y = 1 es la asíntota horizontal en $+\infty$.**

Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada.

Si x < -1, $f'(x) = 2/x^2$, de $f'(x) = 0 \to 2 = 0$, lo cual es absurdo y en esa rama no hay extremos. Además como $f'(-2) = 2/(-2)^2 = 1/2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(-\infty,-1)$.**

Si -1 < x < 1, f'(x) = -2x, de f'(x) = 0 $\rightarrow$ x = 0, posible extremo.

Como f'(-0'5) = -2(-0'5) = 1 > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-1,0)**

Como f'(0'5) = -2(0'5) = -1 < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0,1)**

Si 1 < x, f'(x) = $-2/x^2$, de f'(x) = 0 $\rightarrow$ -2 = 0, lo cual es absurdo y en esa rama no hay extremos. Además como f'(2) = $-2/(2)^2$ = -1/2 < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1,+∞).**

Por definición **x = 0 es un máximo relativo que vale f(0) = 4.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

Las instalaciones de un club tienen una sala de medios audiovisuales y una de informática. El 60% de los socios utiliza la 1ª, el 30% la 2ª y el 20% ambas.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un socio, elegido al azar, no utilice ninguna de las dos salas.

b) (1 punto) Si se sabe que un socio utiliza la sala de audiovisuales, ¿cuál es la probabilidad de que no utilice la de informática?

Solución

Las instalaciones de un club tienen una sala de medios audiovisuales y una de informática. El 60% de los socios utiliza la 1ª, el 30% la 2ª y el 20% ambas.

a)

Calcule la probabilidad de que un socio, elegido al azar, no utilice ninguna de las dos salas.

Llamamos A y B a los sucesos "sala audiovisual" y "sala informática".

Del problema tenemos: p(A) = 60% = 0'6, p(B) = 30% = 0'3, p(ambas) = p(A$\cap$B) = 20% = 0'2

Sabemos que p(A$\cup$B) = p(A) + p(B) - p(A$\cap$B); p(A/B) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; p(B) = 1 - p(B^C);

p($A^C\cap B^C$) = {Ley de Morgan} = p($(A\cup B)^C$) = {suceso contrario} = 1 - p(A$\cup$B); p($A\cap B^C$) = p(A) - p(A$\cap$B).

Me piden **p(no utilice ninguna)** = p(niA y niB) = p($A^C\cap B^C$) = {Ley de Morgan} = p($(A\cup B)^C$) = {suceso contrario} = 1 - p(A$\cup$B) = 1 – 0'7 **= 0'3.**

p(A$\cup$B) = p(A) + p(B) - p(A$\cap$B) = 0'6 + 0'3 - 0'2 = 0'7

b)

Si se sabe que un socio utiliza la sala de audiovisuales, ¿cuál es la probabilidad de que no utilice la de informática?

Me piden **p(B^C/A)** = $\frac{p(B^C\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(B\cap A)}{p(A)}$ = (0'6 – 0'2)/(0'6) = 2/3 $\cong$ **0'667.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

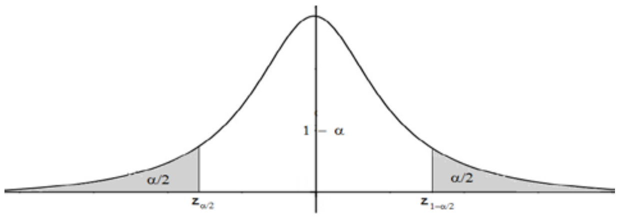
El tiempo de espera, en minutos, de los usuarios en una determinada parada de autobús sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 1'5 minutos.

a) (0'75 puntos) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera para muestras aleatorias de tamaño 16?

b) (1'25 puntos) Si hemos tomado una muestra aleatoria de 16 usuarios, cuya media es 5 minutos, determine el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\bar{x} = (a+b)/2$, el <u>error máximo</u> de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b-a)/2$, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

El tiempo de espera, en minutos, de los usuarios en una determinada parada de autobús sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 1’5 minutos.

a)

¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera para muestras aleatorias de tamaño 16?

Datos del problema: $X \to$ Normal de media μ, $\sigma = 1'5$; $n = 16$.

Sabemos que si la población X sigue una normal $N(\mu,\sigma) = N(\mu,1'5)$, **entonces la distribución muestral de medias $\bar{X}$, sigue una** $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(\mu,\frac{1'5}{\sqrt{16}}) =$ **$N(\mu,0'375)$.**

b)

Si hemos tomado una muestra aleatoria de 16 usuarios, cuya media es 5 minutos, determine el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional.

Datos del problema: $\sigma = 1'5$; $n = 16$, $\bar{x} = 5$, nivel de confianza = 95% = 0’95 = = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'05$, es decir $\alpha/2 = 0'05/2 = 0'025$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5 - 1'96\cdot\frac{1'5}{\sqrt{16}}, 5 + 1'96\cdot\frac{1'5}{\sqrt{16}}\right) = \mathbf{(4'265, 5'735)}.$$