# OPCIÓN A

## EJERCICIO 1_A

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.
b) (2 puntos) Haciendo m = 4, resuelva la ecuación matricial X·A = (3 1 1).

**Solución**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a)
Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

Sabemos que la matriz a tiene inversa i det(A) = |A| $\neq$ **0.**
Calculamos el determinante de la matriz A, desarrollando por el adjunto de la tercera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (m+1)(3 + m - 6) - 2(6 - 0) + 0 = (m+1)(m - 3) - 12 = m^2 - 2m - 3 -12 = m^2 - 2m - 15.$$

Igualando a cero tenemos $m^2 - 2m - 15 = 0$, de donde $m = \dfrac{-(-2)\pm\sqrt{4+4\cdot 15}}{2} = \dfrac{2\pm 8}{2}$, luego m = 5 y m = -3.

**Por tanto si $m \neq 5$ y $m \neq -3$, $|A| \neq 0$ y existe la matriz inversa $A^{-1}$.**

b)
Haciendo m = 4, resuelva la ecuación matricial X·A = (3 1 1).

Tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, y hemos visto en el apartado (a) que existe $A^{-1}$. Por tanto multiplicando por la derecha la expresión X·A = (3 1 1) por $A^{-1}$, tenemos $X\cdot A\cdot A^{-1} = (3\ 1\ 1)\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot I = (3\ 1\ 1)\cdot A^{-1}$, luego la matriz pedida es $X = (3\ 1\ 1)\cdot A^{-1}$.
Calculamos $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = (4)^2 - 2(4) - 15 = -7$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{A^{-1}} = (1/-7)\cdot\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{X} = (3\ 1\ 1)\cdot A^{-1} = (3\ 1\ 1)\cdot(-1/7)\cdot\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (-1/7)\cdot(3\ 1\ 1)\cdot\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (-1/7)\cdot(7\ 0\ -7)$ **= (-1 0 1).**

## EJERCICIO 2_A

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) (0'75 puntos) $f(x) = \dfrac{e^{5x}}{x^3 - 1}$.

b) (0'75 puntos) g(x) = 4x .L(3x +1) .

c) (0'75 puntos) $h(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^3 + 2x)$.

d) (0'75 puntos) $p(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.

**Solución**

Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{e^{5x}}{x^3 - 1}$. b) g(x) = 4x·L(3x +1) . c) $h(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^3 + 2x)$. d) $p(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$( f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $( f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

( $(f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(a^x)' = a^x.\ln(a)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$ ; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

a) $f(x) = \frac{e^{5x}}{x^3-1}$; $f'(x) = \frac{e^{5x}\cdot(5)\cdot(x^3-1) - e^{5x}\cdot(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{e^{5x}\cdot(5x^3-3x^2-5)}{(x^3-1)^2}$

b) $g(x) = 4x\cdot L(3x+1)$; $g'(x) = 4\cdot L(3x+1) + (4x)\cdot\frac{3}{3x+1} = 4\cdot L(3x+1) + \frac{12x}{3x+1}$

c) $h(x) = (x^2-1)\cdot(x^3+2x)$; $h'(x) = (2x)\cdot(x^3+2x) + (x^2-1)\cdot(3x^2+2)$.

d) $p(x) = \frac{x+2}{x-2}$; d) $p'(x) = \frac{1\cdot(x-2) - (x+2)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$.

**EJERCICIO 3_A**

Parte I

El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55% de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40% de los hombres votan al partido A y el 50% al B. El 60% de las mujeres votan al partido A y el 20% al B. El resto de electores no vota.

a) (1 punto) Halle la probabilidad de que una persona, elegida al azar, no vote.

b) (1 punto) Sabiendo que una persona, elegida al azar, ha votado al partido A, halle la probabilidad de que sea mujer.

**Solución**

El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55% de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40% de los hombres votan al partido A y el 50% al B. El 60% de las mujeres votan al partido A y el 20% al B. El resto de electores no vota.

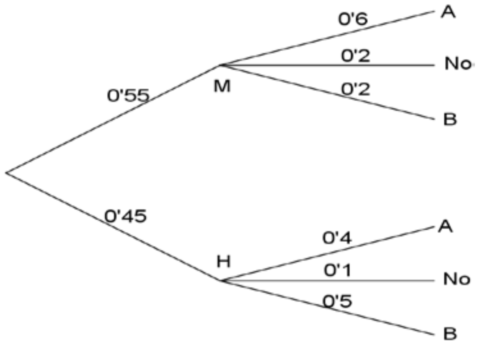
a)

Halle la probabilidad de que una persona, elegida al azar, no vote.

Llamemos M, H, A, B y No, a los sucesos siguientes, “ser mujer”, “ser hombre”, "vote partido A", “vote partido B” y "no vote", respectivamente.

Datos del problema p(M) = 55% = 0’55; p(A/H) = 40% = 0’4; p(B/H) = 50% = 0’5; p(A/M) = 60% = 0’6; p(B/M) = 20% = 0’2.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).




Usando el Teorema de la Probabilidad total

**p(No vote)** = p(No) = p(M).p(No/M) + p(H).p(No/H) = 0’55·0’2 + 0’45·0’1 **= 0’155**

b)

Sabiendo que una persona, elegida al azar, ha votado al partido A, halle la probabilidad de que sea mujer.

Aplicando el teorema de Bayes y el Teorema de la Probabilidad Total, tenemos:

$$\mathbf{p(M/A) =} \frac{p(M\cap A)}{p(A)} = \frac{p(M)\cdot p(A/M)}{p(M)\cdot p(A/M) + p(H)\cdot p(A/H)} = (0'55)\cdot(0'6)/(\,(0'55)\cdot(0'6) + (0'45)\cdot(0'4)\,)$$

$= 0'33/0'51$ $\mathbf{= 11/17 \cong 0'6471.}$

**EJERCICIO 3_A**

Parte II

Los resultados de un test de sensibilidad musical realizado a los alumnos de un Conservatorio se distribuyen según una ley Normal de media 65 y desviación típica 18.

a) (0’75 puntos) ¿Cuál es la distribución de la media muestral para muestras de tamaño 25?

b) (1’25 puntos) Para muestras aleatorias de tamaño 100, halle la probabilidad de que su puntuación media esté comprendida entre 63 y 67 puntos.

**Solución**

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Los resultados de un test de sensibilidad musical realizado a los alumnos de un Conservatorio se distribuyen según una ley Normal de media 65 y desviación típica 18.

a)

¿Cuál es la distribución de la media muestral para muestras de tamaño 25?

Datos del problema: Distribución de la población $X \rightarrow N(\mu;\sigma) = N(65; 18)$; $\mathbf{\mu = 65}$; $\mathbf{\sigma = 18}$; n = 25.

**La distribución de las medias muestrales es** $\overline{X} \rightarrow N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(65 ; \frac{18}{\sqrt{25}})$ **= N(65;3'6).**

b)

Para muestras aleatorias de tamaño 100, halle la probabilidad de que su puntuación media esté comprendida entre 63 y 67 puntos.

Datos del problema: Distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(65 ; \frac{18}{\sqrt{100}}) =$ N(65;1'8).

Me están pidiendo la probabilidad "$p(63 \le \overline{X} \le 67)$"

**Luego** $\mathbf{p(63 \le \overline{X} \le 67)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{63 - 65}{1'8} \le Z \le \frac{67 - 65}{1'8}) \cong p(-1'11 \le Z \le 1'11) =$

$= p(Z \le 1'11) - p(Z \le -1'11) = p(Z \le 1'11) – (1 - p(Z \le 1'11)) = 2\cdot p(Z \le 1'11) – 1 =$ {Mirando en la tabla} =
$= 2\cdot 0'8665 – 1$ **= 0'733**.

## OPCIÓN B

### EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 euros.

Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

**Solución**

Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 euros.

Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

"x" = Número de muñecas.
"y" = Número de coches teledirigidos.

Función Objetivo **F(x,y) = 10x + 15y**. (Beneficio muñeca 10€ y beneficio coche 15€ y ).

*Restricciones:*

Dispone de 1800 horas, cada muñeca necesita 3 horas y cada coche necesita 6 horas: $\rightarrow 3x + 6y \le 1800$
La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches: $\rightarrow x \le 200, \; y \le 300$.

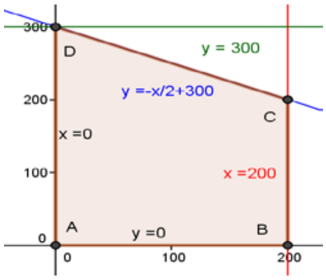
Se fabricará alguna muñeca y algún coche: $\rightarrow$ $x \geq 0$, $y \geq 0$

Las desigualdades $3x + 6y \leq 1800$; $x \leq 200$, $y \leq 300$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $3x + 6y = 1800$; $x = 200$, $y = 300$, $x = 0$, $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -x/2 + 300$; $x = 200$, $y = 300$, $x = 0$, $y = 0$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.




Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $y = 0$ y $x = 200$, tenemos el punto de corte es B(200,0)
De $x = 200$ e $y = -x/2+300$, tenemos $y = 200$ y el punto de corte es C(200,200).
De $y = -x/2+300$ y $x = 0$, tenemos el punto de corte es D(0,300)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(200,0), C(200,200) y D(0,300).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 10x + 15y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores : A(0,0), B(200,0), C(200,200) y D(0,300). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(0,0) = 10(0) + 15(0) = 0$; $F(200,0) = 10(200) + 15(0) = 2000$;
**F(200,200)** $= 10(200) + 15(200)$ **= 5000**; $F(0,1600) = 10(0) + 15(300) = 4500$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 5000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(200,200), es decir el máximo ingreso es de 5000 € y se alcanza fabricando 200 muñecas y 200 coches.**

## EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) Sea la función $f(x) = a/x + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1,3).
b) (1'5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x \cdot Lx$ en el punto de abscisa 1.

**Solución**

a)
Sea la función $f(x) = a/x + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1,3).

Como f tiene en el punto (1,3) un extremo (anula la 1ª derivada), tenemos que **f(1)=3** (por punto) y **f'(1)= 0** (por extremo).

$f(x) = a/x + bx^2$; $f'(x) = -a/x^2 + 2bx$.

De $f(1) = 3$ $\rightarrow$ $a/(1) + b(1)^2 = 3$ $\rightarrow$ $\mathbf{a + b = 3.}$
De $f'(1) = 0$ $\rightarrow$ $-a/(1)^2 + 2b(1) = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{-a + 2b = 0}$, de donde $\mathbf{a = 2b.}$ Entrando en la anterior tenemos:
$a + b = 3$ $\rightarrow$ $\mathbf{2b + b = 3}$ $\rightarrow$ $3b = 3$, de donde $\mathbf{b = 1}$ **y** $\mathbf{a = 2}$.
b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x \cdot Lx$ en el punto de abscisa 1.

La recta tangente a g en x = 1 es "y – g(1) = g '(1)·(x - 1)".
g(x) = x·Lx; g'(x) = Lx + x·(1/x) = Lx + 1 → g(1) = 1·L1 = 0 y g '(1) = L1 + 1 = 0 + 1 = 1, y **la recta tangente pedida es y - (0) = 1·(x - 1) = x - 1, es decir y = x - 1.**

## EJERCICIO 3_B

Parte I

En una ciudad, el 60% de los niños usa zapatillas deportivas, el 50% usa ropa deportiva y el 20% usa ambas prendas.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño, elegido al azar, no use ninguna de las dos prendas?
b) (1 punto) Si un niño usa zapatillas deportivas, ¿cuál es la probabilidad de que no use ropa deportiva?

**Solución**

En una ciudad, el 60% de los niños usa zapatillas deportivas, el 50% usa ropa deportiva y el 20% usa ambas prendas.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que un niño, elegido al azar, no use ninguna de las dos prendas?

Llamamos A y B a los sucesos "usa zapatillas" y "usa ropa deportiva".
Del problema tenemos: p(A) = 60% = 0'6, p(B) = 50% = 0'5, p(ambas) = $p(A\cap B)$ = 20% = 0'2
Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(no use ninguna)** = $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} =
= $1 - p(A\cup B)$ = 1 – 0'9 **= 0'1.**
$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9
b)
Si un niño usa zapatillas deportivas, ¿cuál es la probabilidad de que no use ropa deportiva?
Me piden **$p(B^C/A)$** = $\frac{p(B^C\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(B\cap A)}{p(A)}$ = (0'6 – 0'2)/(0'6) = 2/3 ≅ **0'667.**

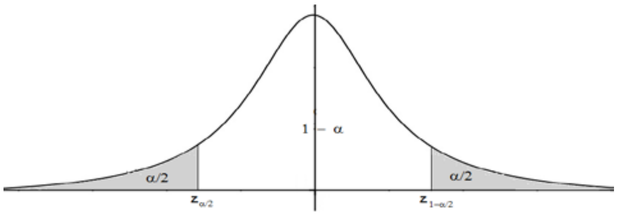
## EJERCICIO 3_B

Parte II

El peso neto de las bolsas de almendras de una determinada marca es una variable aleatoria Normal con media μ, desconocida, y varianza $\sigma^2$ = 50'4 $g^2$. Se sabe que 35 bolsas, elegidas al azar, han dado un peso total de 8652 g.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 90%, para μ.
b) (0'5 puntos) ¿A partir de qué nivel de confianza, el correspondiente intervalo para μ contiene el valor 250 g?

**Solución**

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$




También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

*También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para* *el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2,*

*por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

El peso neto de las bolsas de almendras de una determinada marca es una variable aleatoria Normal con media μ, desconocida, y varianza $\sigma^2$ = 50’4 $g^2$. Se sabe que 35 bolsas, elegidas al azar, han dado un peso total de 8652 g.
a)
Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 90%, para μ.

Datos del problema: $\sigma^2$ = 50’4; σ = √(50’4) ≅ 7’0993; n = 35, $\overline{x}$ = 8652/35 = 247’2, nivel de confianza = 90% = 0’90 = 1 - α, de donde α = 0’1, es decir α/2 = 0’1/2 = 0’05.
De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0’05 = 0’95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’95 no viene, y que una de las mas próximas es 0’9495, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’64, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(247'2 - 1'64\cdot\frac{7'0993}{\sqrt{35}}, 247'2 + 1'64\cdot\frac{7'0993}{\sqrt{35}}\right) \cong$$ **(245’232, 249’168).**

b)
¿A partir de qué nivel de confianza, el correspondiente intervalo para μ contiene el valor 250 g?

Datos del problema: Me dan el extremo superior del intervalo = b = 250 = $\overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, σ = 7’0993, n = 35.

Tenemos que 250 = $\overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 247’2 + $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{7'0993}{\sqrt{35}}$, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (250 – 247’2)· $\frac{\sqrt{35}}{7'0993}$ ≅ **2’33**
y mirando en las tablas vemos que p(Z ≤ 2’33) = 1 - α/2 = 0’9901, por lo tanto tenemos que
α = (1 - 0’9901)·2 = 0’0198, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0’0198 = 0’9802 = = 98’02%.**