

## OPCIÓN A

## EJERCICIO 1\_A

a) (1'5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$ .

b) (1'5 puntos) Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule  $(A^t \cdot B - 2 \cdot I_2)^{-1}$  ( $I_2$  es la matriz unidad de orden 2 y  $A^t$  la traspuesta de A).

## Solución

a)

Clasifique y resuelva el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$ .

Reducimos por Gauss el sistema

$$\begin{array}{l} x + 2y + z = 5 \quad \rightarrow \quad x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 4 \quad (F_2 - 2F_1) \rightarrow \quad -y - 3z = -6 \end{array}$$

Como tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Tomando  $z = \lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $y = -3\lambda + 6$  y  $x = 5 - 2(-3\lambda + 6) - (\lambda) = -7 + 5\lambda$ .

**La solución del sistema es  $(x, y, z) = (-7 + 5\lambda, -3\lambda + 6, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .**

b)

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule  $(A^t \cdot B - 2 \cdot I_2)^{-1}$  ( $I_2$  es la matriz unidad de orden 2 y  $A^t$  la traspuesta de A).

$$C = (A^t \cdot B - 2 \cdot I_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si la matriz  $C$  tiene matriz inversa  $C^{-1}$ , si podemos pasar de  $(C|I_2)$  mediante transformaciones elementales a la matriz  $(I_2|C^{-1})$ .

$$(C|I_2) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1/2} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) = (I_2|C^{-1}),$$

$$\text{por tanto } C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

También la podíamos ver por la fórmula  $C^{-1} = 1/(|C|) \cdot \text{Adj}(C^t)$ .

$$|C| = \det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0, \text{ luego existe } C^{-1}; C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$C^{-1} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

## EJERCICIO 2\_A

El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por  $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$ , en función de la hora  $x$ , siendo  $11 \leq x \leq 20$ .

a) (1 punto) Halle los extremos relativos de esta función.

b) (1 punto) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

c) (1 punto) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

## Solución

El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por  $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$ , en función de la hora  $x$ , siendo  $11 \leq x \leq 20$ .

a)

Halle los extremos relativos de esta función.

Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada, pero como después nos piden la gráfica vamos a estudiar la monotonía de  $f$ , es decir su 1ª derivada entre 11 y 20.

$$f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296; f'(x) = 3x^2 - 84x + 576$$

De  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 84x + 576 = 0 \rightarrow x^2 - 28x + 192 = 0 \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 192}}{2} = \frac{28 \pm 4}{2}$ , de donde las soluciones son  $x_1 = 16$  y  $x_2 = 12$ , que son los posibles extremos relativos.

Como  $f'(11,5) = 3(11,5)^2 - 84(11,5) + 576 = 6,75 > 0$ , **f es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en (11,12).**

Como  $f'(13) = 3(13)^2 - 84(13) + 576 = -9 < 0$ , **f es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en (12,16).**

Como  $f'(17) = 3(17)^2 - 84(17) + 576 = 15 > 0$ , **f es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en (16,20).**

Por definición **en  $x = 12$  hay un máximo relativo** que vale  $f(12) = (12)^3 - 42(12)^2 + 576(12) - 2296 = 296$ .

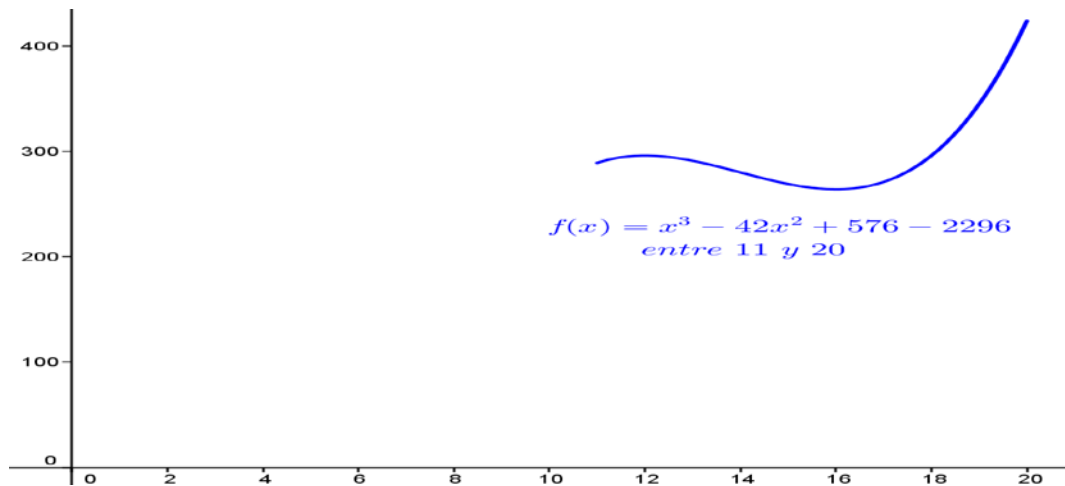
Por definición **en  $x = 16$  hay un mínimo relativo** que vale  $f(16) = (16)^3 - 42(16)^2 + 576(16) - 2296 = 264$ .

b)

Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **f es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en (11,12)  $\cup$  (16,20) y que f es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en (12,16).**

Además como  $f(11) = (11)^3 - 42(11)^2 + 576(11) - 2296 = 289$  y  $f(20) = (20)^3 - 42(20)^2 + 576(20) - 2296 = 424$ , un esbozo del trozo de cúbica es:



c)

Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

Nos están pidiendo los valores máximo y mínimos absolutos en el intervalo  $[11,20]$ , que como sabemos se encuentran en los extremos del intervalo (11 y 20) o en las soluciones de  $f'(x) = 0$  (12 y 16).

Tenemos  $f(11) = 289$ ,  $f(12) = 296$ ,  **$f(16) = 264$**  y  **$f(20) = 424$** , tenemos que **el mínimo absoluto de clientes es 264 y se alcanza a las 16 horas y el máximo absoluto de clientes es 424 que se alcanza a las 20 horas.**

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte I

El 55% de la población española son mujeres, de las cuales un 23% usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0,52.

- a) (1 punto) Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?
- b) (1 punto) Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

#### Solución

El 55% de la población española son mujeres, de las cuales un 23% usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0,52.

a)

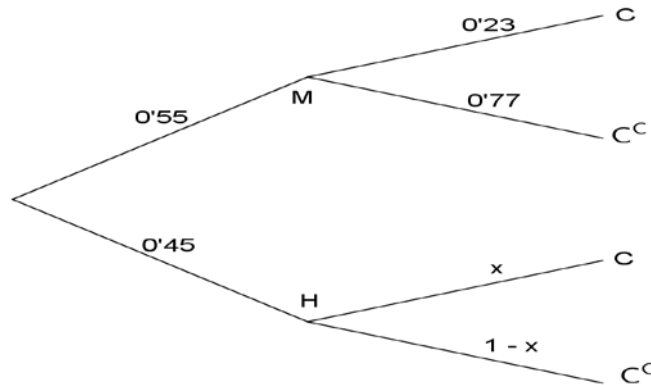
Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?

Llamemos M, H, C y  $C^c$ , a los sucesos siguientes, "ser mujer", "ser hombre", "ir en coche", y "no ir en

coche", respectivamente.

Datos del problema  $p(M) = 55\% = 0'55$ ;  $p(C/M) = 23\% = 0'23$ ;  $p(C) = 0'52$ .

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



**$p(\text{usa coche/Ser hombre}) = p(C/H) = x$**

Usando el Teorema de la Probabilidad total, de  $p(C) = p(M) \cdot p(C/M) + p(H) \cdot p(C/H) = 0'52 = 0'55 \cdot 0'23 + 0'45 \cdot x$ , tenemos  $x = (0'52 - 0'55 \cdot 0'23) / 0'45 \cong 0'87444$ .

Luego  **$p(\text{usa coche/Ser hombre}) = p(C/H) = x \cong 0'87444$** .

b)

Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

Nos han dicho que  $p(C) = 0'52$ , por tanto  $p(C^c) = 1 - 0'52 = 0'48$ .

Nos piden  **$p(\text{Ser mujer/No usa coche}) = p(M/C^c)$**

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(M/C^c) = \frac{p(M \cap C^c)}{p(C^c)} = \frac{p(M) \cdot p(C^c/M)}{p(C^c)} = (0'55) \cdot (0'77) / 0'48 \cong 0'88229.$$

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte II

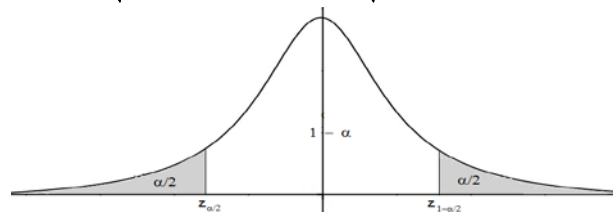
(2 puntos) El peso de los adultos de una determinada especie de peces sigue una ley Normal de desviación típica 112 g.

¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra de peces que debería tomarse para obtener, con una confianza del 95%, la media de la población con un error menor de 20 g?

#### Solución

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$ , el estimador MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a, b)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  y  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$  es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es  $\bar{x} = (a + b)/2$ , el error máximo de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para

el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$ , de donde  $E = (b - a)/2$ ,

por tanto el tamaño mínimo de la muestra es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{b - a} \right)^2$ .

El peso de los adultos de una determinada especie de peces sigue una ley Normal de desviación típica 112 g.

¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra de peces que debería tomarse para obtener, con una confianza del 95%, la media de la población con un error menor de 20 g?

Datos del problema:  $\sigma = 112$ ,  $E \leq 20$ , nivel de confianza = 95% = 0'95 =  $1 - \alpha$ , de donde  $\alpha = 0'05$ , es decir  $\alpha/2 = 0'05/2 = 0'025$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 1'96$ , por tanto de  $n \geq \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{1'96 \cdot 112}{20} \right)^2 \cong 120'47$ , tenemos que **el tamaño mínimo es  $n = 121$** .

## OPCIÓN B

### EJERCICIO 1\_B

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:

$$x + 2y \geq 80, \quad 3x + 2y \geq 160, \quad x + y \leq 70, \text{ y determine sus vértices.}$$

b) (1 punto) Calcule el máximo y el mínimo de la función  $F(x,y) = 9x + 8y - 5$  en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

### Solución

a) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:

$$x + 2y \geq 80, \quad 3x + 2y \geq 160, \quad x + y \leq 70, \text{ y determine sus vértices.}$$

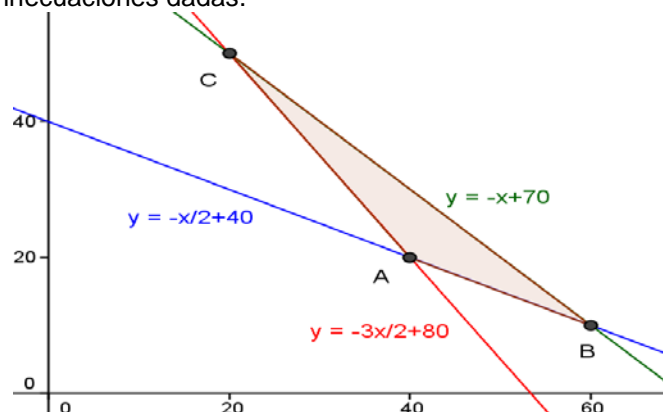
b) Calcule el máximo y el mínimo de la función  $F(x,y) = 9x + 8y - 5$  en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

(a) y (b)

Las desigualdades  $x + 2y \geq 80$ ,  $3x + 2y \geq 160$ ,  $x + y \leq 70$ , las transformamos en igualdades, y ya son rectas,  $x + 2y = 80$ ,  $3x + 2y = 160$ ,  $x + y = 70$ .

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos  $y = -x/2 + 40$ ;  $y = -3x/2 + 80$ ;  $y = -x + 70$ .

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De  $y = -x/2 + 40$  e  $y = -3x/2 + 80$ , tenemos  $-x/2 + 40 = -3x/2 + 80$ , luego  $-x + 80 = -3x + 160$ , de donde  $2x = 80$ , es decir  $x = 40$  e  $y = 20$ , y el vértice es A(40,20).

De  $y = -x/2 + 40$  e  $y = -x + 70$ , tenemos  $-x/2 + 40 = -x + 70$ , es decir  $-x + 80 = -2x + 140$ , de donde  $x = 60$ , luego  $y = 10$ , y el vértice es B(60,10).

De  $y = -x + 70$  e  $y = -3x/2 + 80$ , tenemos  $-x + 70 = -3x/2 + 80$ , es decir  $-2x + 140 = -3x + 160$ , de donde  $x = 20$ , luego  $y = 50$ , y el vértice es C(20,50).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son:  $A(40,20)$ ,  $B(60,10)$  y  $C(20,50)$ .

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos  $F$  en los puntos anteriores  $A(40,20)$ ,  $B(60,10)$  y  $C(20,50)$ . En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$$F(40,20) = 9(40) + 8(20) - 5 = 515; \quad F(60,10) = 9(60) + 8(10) - 5 = 615;$$

$$F(20,50) = 9(20) + 8(50) - 5 = 575;$$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función  $F$  en la región es 615** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice  $A(60,10)$** , y **el mínimo absoluto de la función  $F$  en la región es 515** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice  $A(40,20)$** .

### EJERCICIO 2\_B

- a) (1'5 puntos) Sea la función  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  para que su gráfica pase por el punto  $(0,-5)$  y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta  $y = -4x$ .
- b) (1'5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función  $g$  cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos  $(2,0)$  y  $(3,1)$ .

#### Solución

a)

Sea la función  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  para que su gráfica pase por el punto  $(0,-5)$  y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta  $y = -4x$ .

Como  $(0,-5)$  es un punto de la gráfica tenemos que  $f(0) = -5$ .

Como en  $(0,-5)$  la recta tangente sea paralela a la recta  $y = -4x$ , las pendientes de la recta  $y = -4x$  ( $y' = -4$ ) y la de la recta tangente en  $x = 0$  ( $f'(0)$ ) son iguales, es decir  $f'(0) = -4$ .

$$f(x) = x^2 + ax + b; \quad f'(x) = 2x + a.$$

$$\text{De } f'(0) = -4 \rightarrow 2(0) + a = -4 \rightarrow \mathbf{a = -4}.$$

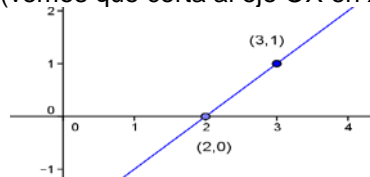
$$\text{De } f(0) = -5 \rightarrow (0)^2 + -4(0) + b = -5 \rightarrow \mathbf{b = -5}, \text{ luego los valores pedidos son } \mathbf{a = -4 \text{ y } b = -5}.$$

b)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función  $g$  cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos  $(2,0)$  y  $(3,1)$ .

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada.

La gráfica de  $g'$  es la recta siguiente (vemos que corta al eje  $OX$  en  $x = 2$ ).



De  $g'(x) = 0 \rightarrow x = 2$ , que será el posible extremo relativo.

Como  $g'(1) < 0$ ,  **$g$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(-\infty, 2)$** .

Como  $g'(3) = 1 > 0$ ,  **$g$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(2, +\infty)$** .

Por definición **en  $x = 2$  hay un mínimo relativo**.

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte I

En una biblioteca sólo hay libros de física y de matemáticas, que están escritos en inglés o en español. Se sabe que el 70% de los libros son de física, el 80% de los libros están escritos en español y el 10% son libros de matemáticas escritos en inglés.

a) (1 punto) Calcule qué tanto por ciento de los libros son de física y escritos en español.

b) (1 punto) Si cogemos un libro de física, ¿cuál es la probabilidad de que esté escrito en español?

#### Solución

En una biblioteca sólo hay libros de física y de matemáticas, que están escritos en inglés o en español. Se sabe que el 70% de los libros son de física, el 80% de los libros están escritos en español y el 10% son libros de matemáticas escritos en inglés.

Llamemos F, M, I y Es, a los sucesos siguientes, "libro de física", "libro de matemáticas", "escrito en inglés", y "escrito en español", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada. La suma de los totales coincide), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

También se podría hacer por un diagrama de árbol.

Pasaremos primero el % en probabilidades (el total de los totales es 1).

70% = 0'7; 80% = 0'8; 10% = 0'1.

	Escrito en Inglés = I	Escrito en Español = Es	Totales
Libro de Física = F			0'70
Libro de Matemáticas = M	0'10		
Totales		0'80	1

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Escrito en Inglés = I	Escrito en Español = Es	Totales
Libro de Física = F	<b>0'10</b>	<b>0'60</b>	0'70
Libro de Matemáticas = M	0'10	<b>0'20</b>	<b>0'30</b>
Totales	<b>0'20</b>	0'80	1

a)

Calcule qué tanto por ciento de los libros son de física y escritos en español.

$$p(\text{libro física escrito en inglés}) = p(F \cap I) = \frac{\text{Total libros física y en inglés}}{\text{Total libros}} = 0'60/1 = 0'60 = 60\%.$$

b)

Si cogemos un libro de física, ¿cuál es la probabilidad de que esté escrito en español?

$$p(\text{Escrito en español/libro física}) = p(Es/F) = \frac{p(Es \cap F)}{p(F)} = \frac{\text{Total libros física y en español}}{\text{Total libros física}} = 0'60/0'70 = \cong 0'8571.$$

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte II

Se está estudiando el consumo de gasolina de una determinada marca de coches. Para ello se escogen 50 automóviles al azar y se obtiene que el consumo medio es de 6'5 litros. Con independencia de esta muestra, se sabe que la desviación típica del consumo de ese modelo de coches es 1'5 litros.

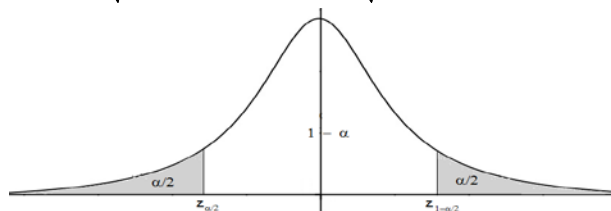
a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para el consumo medio de gasolina de los coches de esa marca.

b) (1 punto) El fabricante afirma que el consumo medio de gasolina de sus vehículos está comprendido entre 6'2 y 6'8 litros. ¿Con qué nivel de confianza puede hacer dicha afirmación?

#### Solución

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$ , el *estimador* MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C. (\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a, b)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  y  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es  $\bar{x} = (a + b)/2$ , el error máximo de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$ , de donde  $E = (b - a)/2$ , por tanto el tamaño mínimo de la muestra es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{b - a} \right)^2$ .

Se está estudiando el consumo de gasolina de una determinada marca de coches. Para ello se escogen 50 automóviles al azar y se obtiene que el consumo medio es de 6'5 litros. Con independencia de esta muestra, se sabe que la desviación típica del consumo de ese modelo de coches es 1'5 litros.

a)

Halle un intervalo de confianza, al 97%, para el consumo medio de gasolina de los coches de esa marca.

Datos del problema:  $\sigma = 1'5$ ,  $n = 50$ ,  $\bar{x} = 6'5$ , nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 -  $\alpha$ , de donde  $\alpha = 0'03$ , es decir  $\alpha/2 = 0'03/2 = 0'015$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'985 viene, y que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 2'17$ , por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left( 6'5 - 2'17 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{50}}, 6'5 + 2'17 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{50}} \right) \cong (6'03967, 6'96033).$$

b)

El fabricante afirma que el consumo medio de gasolina de sus vehículos está comprendido entre 6'2 y 6'8 litros. ¿Con qué nivel de confianza puede hacer dicha afirmación?

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (6'2,6'8),  $\sigma = 1'5$ ,  $z_{1-\alpha/2} = 2'57$ .

De la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , tenemos que  $(6'8 - 6'2) = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1'5}{\sqrt{50}}$ , es decir

$z_{1-\alpha/2} = 0'6 \cdot \sqrt{(50)/3} \cong 1'414$  y mirando en las tablas vemos que  $p(Z \leq 1'41) = 1 - \alpha/2 = 0'9207$ , por lo tanto tenemos que  $\alpha = (1 - 0'9207) \cdot 2 = 0'1586$ , luego el **nivel de confianza pedido es  $1 - \alpha = 1 - 0'1586 = 0'8414 = 84'14\%$** .