OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x + 3y \le 2 \\ -x + 2y \ge 6 \\ 2x + 3y \le 37 \end{cases}$.

a) (2'25 puntos) Represente el conjunto solución y determine sus vértices.
b) (0'75 puntos) Halle el punto del recinto anterior en el cual la función F(x,y) = -2x + 5y alcanza su valor máximo.

Solución

Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x + 3y \le 2 \\ -x + 2y \ge 6 \\ 2x + 3y \le 37 \end{cases}$.

a) Represente el conjunto solución y determine sus vértices.
b) Halle el punto del recinto anterior en el cual la función F(x,y) = -2x + 5y alcanza su valor máximo.

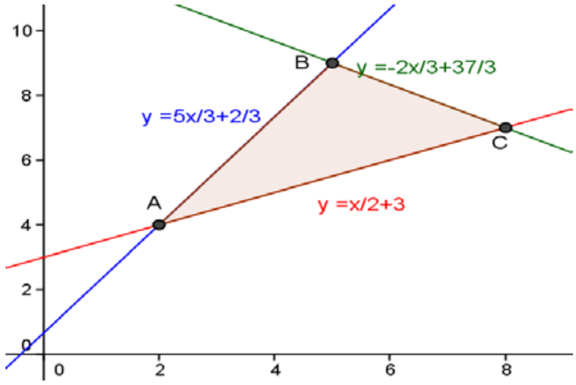
(a) y (b)

Las desigualdades $-5x + 3y \le 2$, $-x + 2y \ge 6$, $2x + 3y \le 37$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas $-5x + 3y = 2$, $-x + 2y = 6$, $2x + 3y = 37$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 5x/3 + 2/3,\quad y = x/2 + 3,\quad y = -2x/3 + 37/3.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = 5x/3+2/3 e y = x/2+3, tenemos 5x/3+2/3 = x/2+3, luego 10x+4 = 3x+18, de donde 7x = 14, es decir x = 2 e y = 4, y el vértice es A(2,4).

De y = 5x/3+2/3 e y = -2x/3+37/3, tenemos 5x/3+2/3 = -2x/3+37/3, es decir 5x+2 = -2x+37, de donde 7x = 35, luego x = 5 e y = 9, y el vértice es B(5,9).

De y = x/2+3 e y = -2x/3+37/3, tenemos x/2+3 = -2x/3+37/3, es decir 3x+18 = -4x+74, de donde 7x = 56, luego x = 8 e y = 7, y el vértice es C(8,7).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(2,4), B(5,9) y C(8,7).

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(2,4), B(5,9) y C(8,7). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(2,4) = -2(2) + 5(4) = 16; **F(5,9)** = -2(5) + 5(9) **= 35**; F(8,7) = -2(8) + 5(7) = 19;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 35** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(5,9).**

EJERCICIO 2_A

a) (2 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en x = 2.

b) (1 punto) Halle la función derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

Solución

a)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en x = 2.

$-(x-1)^2 + b$ es una función continua y derivable en R, en particular en x < 2.
$a(x-3)^2 + 3$ es una función continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-(x-1)^2 + b) = -(2-1)^2 + b = -1 + b$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} a(x-3)^2 + 3 = a(2-3)^2 + 3 = a + 3$. Igualando tenemos **$-1 + b = a + 3$.**

De $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si } x \le 2 \\ 2a(x-3) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} -2(x-1) = -2(2-1) = -2$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 2a(x-3) = 2a(2-3) = -2a$. Igualando tenemos **$-2a = -2$,** de donde **$a = 1$**, por tanto $-1 + b = (1) + 3$, de donde **$b = 5$.**

b)

Halle la función derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}\cdot f'(x)$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$;

; $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

$g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$. $g'(x) = \dfrac{2\cdot e^{2x+1}\cdot(x-1)^2 - e^{2x+1}\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2\cdot e^{2x+1}\cdot(x-1)(x-1-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2\cdot e^{2x+1}\cdot(x-1)(x-2)}{(x-1)^4}$

EJERCICIO 3_A

Parte I

Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.
a) (1 punto) Determine el espacio muestral asociado al experimento.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

Solución

Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.

a)

Determine el espacio muestral asociado al experimento.

Sean "a_B, e_B, i_B, o_B, u_B, a_A, e_A, i_A, o_A, u_A" los sucesos "vocales escritas respectivamente por Blanca y Alfredo".

Como la vocal escrita por Blanca es independiente de la escrita por Alfredo los resultados posibles son 5x5 = 25.

Espacio muestral = E = {a_B-a_B, a_B-e_A, a_B-i_A, a_B-o_B, a_B-u_A; e_B-a_B, e_B-e_A, e_B-i_A, e_B-o_B, e_B-u_A; i_B-a_B, i_B-e_A, i_B-i_A, i_B-o_B, i_B-u_A; o_B-a_B, o_B-e_A, o_B-i_A, o_B-o_B, o_B-u_A; u_B-a_B, u_B-e_A, u_B-i_A, u_B-o_B, u_B-u_A}

b)
Calcule la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

A = {no escribir la misma vocal} = {a_B-e_A, a_B-i_A, a_B-o_B, a_B-u_A; e_B-a_B, e_B-i_A, e_B-o_B, e_B-u_A; i_B-a_B, i_B-e_A, i_B-o_B, i_B-u_A; o_B-a_B, o_B-e_A, o_B-i_A, o_B-u_A; u_B-a_B, u_B-e_A, u_B-i_A, u_B-o_B}, hay 20 sucesos

Me piden **p(no escribir la misma vocal) = p(A)** = $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$ = 20/25 = 4/5 **= 0'8.**

EJERCICIO 3_A

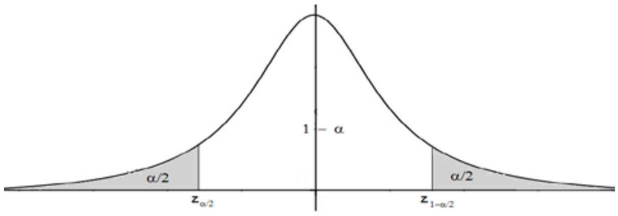
Parte II

La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7'5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21'06, 26'94) para la longitud media.
a) (0'5 puntos) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.
b) (1'5 puntos) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la *<u>media</u>* *es* $\overline{x}$ *= (a + b)/2, el* *<u>error máximo</u>* *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2,*

por tanto el *<u>tamaño mínimo</u>* *de la muestra es n =* $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7'5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21'06, 26'94) para la longitud media.

a)
Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.

Datos del problema: σ = 7'5, n = 25, $\overline{x}$ = 6'5, intervalo de confianza (21'06, 26'94) = (a,b).

Sabemos que **la <u>media</u> es** $\overline{x}$ = (a + b)/2 = (21'06 + 26'94)/2 **= 24.**

b)
Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (21'06, 26'94), σ = 7'5, n = 25.

De la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (26'94 – 21'06) = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{7'5}{\sqrt{25}}$, es decir

$\mathbf{z_{1-\alpha/2}}$ = 5'88·5 /15 **= 1'96** y mirando en las tablas vemos que p(Z ≤ 1'96) = 1 - α/2 = 0'975, por lo tanto tenemos que α = (1 – 0'975)·2 = 0'05, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0'05 = 0'95 = = 95%.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) (0'75 puntos) Calcule la matriz $A = M\cdot M^t - 5M$; (M^t indica la traspuesta de M).
b) (2'25 puntos) Calcule la matriz $B = M^{-1}$ y resuelva la ecuación $N + X\cdot M = M\cdot B$, donde X es una matriz 2x2.

Solución

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a)
Calcule la matriz $A = M\cdot M^t - 5M$; (M^t indica la traspuesta de M).

$$\mathbf{A} = M\cdot M^t - 5M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Si la matriz M tiene matriz inversa M^{-1}, si podemos pasar de $(M|I_2)$ mediante transformaciones elementales a la matriz $(I_2|\ M^{-1})$.

$$(M|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2 - 3F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)^{F_1 + F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)_{F_2/(-2)} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) = (I_2|M^{-1}),$$

por tanto $\mathbf{M^{-1}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

También la podíamos ver por la fórmula $M^{-1} = 1/(|M|)\cdot Adj(M^t)$.

$|M| = det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, luego existe M^{-1}; $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$\mathbf{M^{-1}} = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

De $N + X\cdot M = M\cdot B$, tenemos $X\cdot M = M\cdot B - N \to (B = M^{-1}) \to X\cdot M = M\cdot M^{-1} - N = I_2 - N$. Multiplicando la expresión $X\cdot M = I_2 - N$, por la derecha por M^{-1} tenemos $X\cdot M\cdot M^{-1} = I_2\cdot M^{-1} - N\cdot M^{-1}$, es decir

$X\cdot I_2 = M^{-1} - N\cdot M^{-1}$, de donde $\mathbf{X} = M^{-1} - N\cdot M^{-1} = (I_2 - N)\cdot M^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot(1/-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (-1/2)\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}$.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Represéntela gráficamente.
b) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) (1 punto) Calcule sus extremos y asíntotas horizontales y verticales.

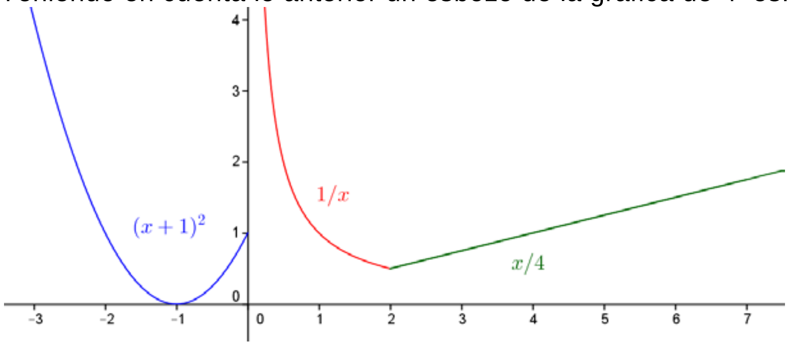
Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a)
Represéntela gráficamente.
La gráfica de $(x + 1)^2$ es una parábola exactamente igual que la de x^2 (vértice (0,0) y las ramas hacia arriba $\cup$) pero desplazada una unidad hacia la izquierda en el eje de abscisas OX, es decir su vértice

en (-1,0). Pero sólo la dibujamos en $x \le 0$ y vemos que en $x = 0$ vale 1.
La gráfica de $1/x$ es una hipérbola que tiene por asíntotas $x = 0$ (la vertical) e $y = 0$ (la horizontal), simétrica respecto al origen (0,0) que se dibuja en el I y III cuadrante, en nuestro caso sólo la dibujaremos entre 0 y 2, es decir pasa por los puntos $(0^+,+\infty)$ y $(2^+,1/2)$.
La gráfica de $x/4$ es una recta que pasa por el origen, pero só lo la dibujamos a partir de $x \ge 2$, es decir una semirrecta. En $x = 2$ vale 1/2.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

Observando su gráfica vemos que es continua en R – {0}, y derivable en R – {0,2}. No obstante vamos a verlo con su dominio y límites.
Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.

$(x + 1)^2$ es continua y derivable en R, en particular en $x < 0$.
$1/x$ es continua y derivable en R – {0}, en particular en $0 < x < 2$.
$x/4$ es continua y derivable en R, en particular en $x > 2$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$ y $x = 2$.

Como f no está definida en $x = 0^+$, **en x = 0 la función no es continua ni derivable**.
f(x) es continua en $x = 2$ si $f(2) = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$.
$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (1/x) = 1/2$;
$f(2) = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x/4) = 1/2$, por tanto **f(x) es continua en x = 2**.

Recapitulando **f es continua en R – {0}**.

De $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en $x = 2$ si $\lim_{x\to 2-} f\,'(x) = \lim_{x\to 2+} f\,'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 2-} f\,'(x) = \lim_{x\to 2-} (-1/x^2) = -1/4$; $\lim_{x\to 2+} f\,'(x) = \lim_{x\to 3+} (1/4) = 1/4$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 2.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Recapitulando **f es derivable en R – {0,2}.**
c)
Calcule sus extremos y asíntotas horizontales y verticales.

Observando la gráfica vemos que en **x = -1 hay un mínimo relativo que vale f(-1) = 0**, que es el vértice del

trozo de parábola $(x + 1)^2$ y **saldría derivando** e igualando a cero.
También observamos que **x = 2 es un mínimo y vale f(2) = 1/2**, y **no sale derivando** aporque en x = 2 f no es derivable
Mirando la gráfica vemos que en **$x = 0^-$ hay un máximo relativo, que vale f(0) = 1,** y **no sale derivando** porque en x = 0 f no es derivable.

Observando la gráfica vemos también que **x = 0 es una asíntota vertical** porque $\lim_{x \to 0+} (1/x) = 1/0^+ = +\infty$.
La hipérbola 1/x también tiene la asíntota horizontal y = 0, pero en nuestro caso no sirve porque sólo la tenemos definida en (0,2) y no podemos calcular el límite en el $+\infty$.

EJERCICIO 3_B

Parte I

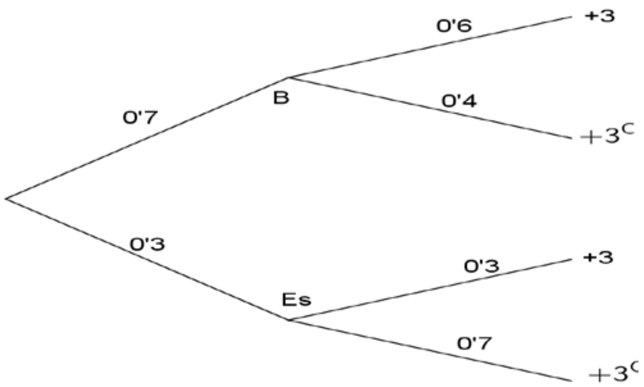
El 70% de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de E.S.O. De los alumnos de Bachillerato, el 60% estudia más de 3 horas al día, y sólo el 30% de los de E.S.O. estudia más de 3 horas al día.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.
b) (1 punto) Sabiendo que un alumno de este Instituto, elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Solución

El 70% de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de E.S.O. De los alumnos de Bachillerato, el 60% estudia más de 3 horas al día, y sólo el 30% de los de E.S.O. estudia más de 3 horas al día.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.

Llamemos B, Es, +3 y $+3^C$, a los sucesos siguientes, “alumno bachillerato”, “alumno E.S.O.”, "estudiar mas de 3 horas", y "no estudiar mas de 3 horas", respectivamente.
Datos del problema p(B) = 70% = 0’7; p(+3/B) = 60% = 0’6; p(+3/Es) = 30% = 0’3.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Usando el Teorema de la Probabilidad total,

p(estudie más de 3 horas al día) = p(+3) = p(B).p(+3/B)+p(Es).p(+3/Es) = 0’7·0’6 + 0’3·0’3 **= 0’51.**

b)
Sabiendo que un alumno de este Instituto, elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/+3)} = \frac{p(B \cap +3)}{p(+3)} = \frac{p(B)\cdot p(+3/B)}{p(+3)} = (0'7)\cdot(0'6)/0'51 \cong \mathbf{0'82353.}$$

EJERCICIO 3_B

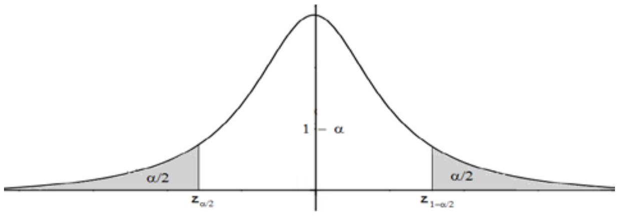
Parte II

De una población Normal, con media desconocida y varianza 81, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 112.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 49.
b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra si se desea que el error cometido, al estimar la

media poblacional, sea inferior a 2, para un nivel de confianza del 90%?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la __media__ es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el __error máximo__ de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el __tamaño mínimo__ de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

De una población Normal, con media desconocida y varianza 81, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 112.

a)

Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 49.

Datos del problema: $\sigma^2 = 81$, : $\sigma = 9$; n = 49, $\overline{x}$ = 112, nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde α = = 0’05, es decir α/2 = 0’05/2 = 0’025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’025 = 0’975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(112 - 1'96\cdot\frac{9}{\sqrt{49}}, 112 + 1'96\cdot\frac{9}{\sqrt{49}}\right)$$ **= (109’48, 114’52).**

b)

¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra si se desea que el error cometido, al estimar la media poblacional, sea inferior a 2, para un nivel de confianza del 90%?

Datos del problema: σ = 9, E ≤ 2, nivel de confianza = 90% = 0’9 = 1 - α, de donde α = 0’1, es decir α/2 = = 0’1/2 = 0’05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’05 = 0’95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’95 no viene, y que una de las más próximas es 0’9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’64.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'64\cdot 9}{2}\right)^2 \cong$ 54’46, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 55**.