OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2\cdot A$.
b) (1'5 puntos) Para x = - 1, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando $A\cdot A^{-1}$.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

a)
Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2\cdot A$.

De $A^2 = 2\cdot A$, tenemos $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix}$. Igualando:

$4 = 4$
$x^2 + 4x = 2x$
$0 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 2x + 4$.

Vemos que la única ecuación es $x^2 + 4x = 2x \rightarrow x^2 + 2x = 0 = x\cdot(x + 2)$, de donde **$x = 0$ y $x = -2$**.

b)
Para x = - 1, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando $A\cdot A^{-1}$.

Si la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}, podemos pasar de la matriz $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a la matriz $(I_2|A^{-1})$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1+F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1/2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$, por tanto $\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

También la podíamos ver por la fórmula $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1}; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, luego

$\mathbf{A^{-1}} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Veamos que $A\cdot A^{-1} = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(1/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I_2}$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x - 1}$.

a) (1 punto) Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) (1 punto) Represéntela gráficamente.

Solución

Sea la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x - 1}$.

a)
Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.

Como es un cociente de funciones polinómicas **su dominio es** R – {soluciones de x – 1 = 0} **= R – {1}.**
También sabemos que es continua y derivable en su dominio, por tanto es **continua y derivable** en **R – {1}.**

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en $\pm\infty$.

También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.), si el límite en dicho número es ∞, que también es nuestro caso.

Tenemos $f(x) = \frac{3 - x}{x - 1}$, cuya gráfica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H.

El número que anula el denominador (x - 1 = 0) es x = 1, y como $\lim_{x\to 1^-} \frac{3 - x}{x - 1} = (2)/0^- = -\infty$, **la recta x = 1 es una A.V. de f**. Además vemos que a la izquierda de x = 1, f está en $-\infty$.

De $\lim_{x\to 1^+} \frac{3 - x}{x - 1} = (2)/0^+ = +\infty$, vemos que a la izquierda de x = 1, f está en $+\infty$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \frac{3 - x}{x - 1} = \lim_{x\to +\infty} (-x/x) = \lim_{x\to +\infty} (-1/1) = -1$, **la recta y = -1 es una A.H. en $\pm\infty$.**

De $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3 - x}{x - 1} - (-1)\right) = 0^+$, tenemos que f está por encima de la A.H. en $+\infty$.

De $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{3 - x}{x - 1} - (-1)\right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. en $-\infty$.

Como tenemos que representarla calculamos los puntos de corte:
Para x = 0, punto (0,-3)
Para f(x) = 0 $\rightarrow$ 3 – x = 0, x = 3 y punto (3,0)
b)
Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

Sabemos que la monotonía sale estudiando la primera derivada f ‘(x).

$f(x) = \frac{3 - x}{x - 1}$; $f'(x) = \frac{-1\cdot(x - 1) - (3 - x)\cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$.

De f ’(x) = 0, tenemos **-2 = 0**, lo cual es absurdo, por tanto **no hay extremos relativos** y la función siempre es estrictamente creciente o decreciente en su dominio.

De $f'(0) = \frac{-2}{(0 - 1)^2} = -2 < 0$, vemos que f ’(x) < 0 en su dominio R – {1}, es decir **f(x) es *estrictamente decreciente*** $(\searrow)$ **en su dominio R – {1}.**

Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f ‘‘(x)

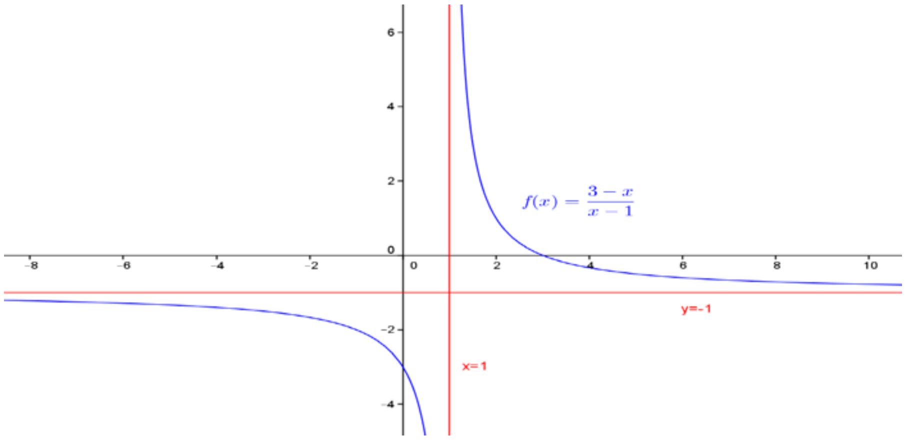
$f(x) = \frac{3 - x}{x - 1}$; $f'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$, $f''(x) = \frac{-(-2)\cdot 2\cdot(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{4\cdot(x - 1)}{(x - 1)^4}$.

De f ‘’(x) = 0, tenemos x – 1 = 0, luego **x = 1, que es NO es un posible punto de inflexión, porque la recta x = 1 era una asíntota vertical.**

Como $f''(0) = \frac{4\cdot(0 - 1)}{(0 - 1)^4} = -4 < 0$, **f(x) es cóncava ($\cap$) en ($-\infty$,1).**

Como $f''(2) = \frac{4\cdot(2 - 1)}{(2 - 1)^4} = 4 > 0$, **f(x) es convexa ($\cup$) en (1, $+\infty$)**.

Ya hemos visto que **x = 1 NO es un punto de inflexión porque x = 1 es una asíntota vertical.**
c)
Represéntela gráficamente.
Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

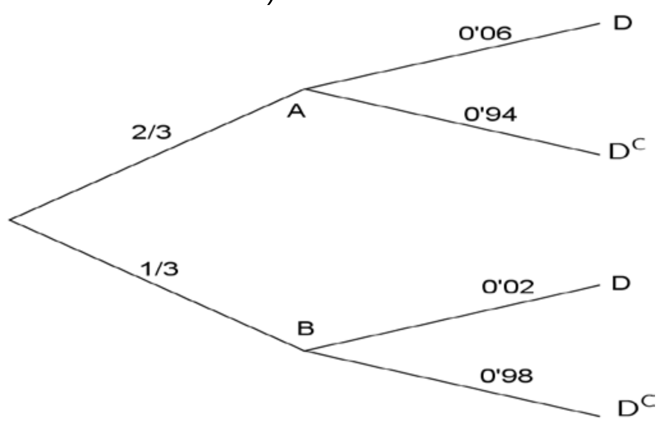
Una máquina A fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6% son defectuosas. Otra máquina B fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2%.
Mezclamos las piezas fabricadas por ambas máquinas en un día y extraemos una al azar.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza extraída sea defectuosa?
b) (1 punto) Sabiendo que la pieza extraída es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina B?

Solución

Una máquina A fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6% son defectuosas. Otra máquina B fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2%.
Mezclamos las piezas fabricadas por ambas máquinas en un día y extraemos una al azar.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que la pieza extraída sea defectuosa?

Llamemos A, B, D y D^C, a los sucesos siguientes, "pieza fabricada por la máquina A", "pieza fabricada por la máquina B", "pieza defectuosa", y "pieza no defectuosa", respectivamente.
Datos del problema p(A) = 100/150 = 2/3; p(B) = 50/150 = 1/3; p(D/A) = 6% = 0'06; p(D/B) = 2% = 0'02.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Usando el Teorema de la Probabilidad total,

p(pieza defectuosa) = p(D) = p(A).p(D/A)+p(B).p(D/B) = (2/3)·0'06 + (1/3)·0'02 **= 7/150 ≅ 0'46667.**

b)
Sabiendo que la pieza extraída es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina B?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/D) =} \frac{p(B\cap D)}{p(D)} = \frac{p(B)\cdot p(D/B)}{p(D)} = (1/3)\cdot(0'02)/(7/150) \mathbf{= 1/7 \cong 0'14286.}$$

EJERCICIO 3_A

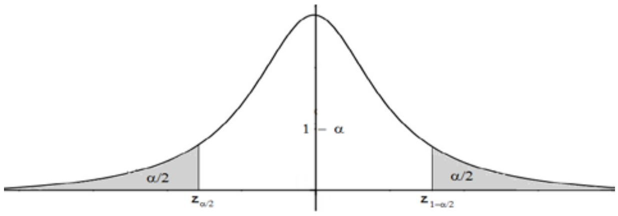
Parte II

Se sabe que la antigüedad de los coches fabricados por una empresa es una variable aleatoria Normal, con desviación típica 2'9 años.
a) (1 punto) Un estudio realizado sobre una muestra aleatoria de 169 coches, de esa empresa, revela que la antigüedad media de la muestra es 8'41 años. Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la antigüedad media de la población.
b) (1 punto) Determine el número mínimo de coches que debe componer una muestra, para obtener, con un nivel de confianza del 95%, un error de estimación menor que 0'35 años.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

Se sabe que la antigüedad de los coches fabricados por una empresa es una variable aleatoria Normal, con desviación típica 2'9 años.
a)
Un estudio realizado sobre una muestra aleatoria de 169 coches, de esa empresa, revela que la antigüedad media de la muestra es 8'41 años. Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la antigüedad media de la población.

Datos del problema: σ = 2'9; n = 169, $\overline{x}$ = 8'41, nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α =
= 0'10, es decir α/2 = 0'10/2 = 0'05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, y que una de las más próximas es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8'41 - 1'64\cdot\frac{2'9}{\sqrt{169}}, 8'41 + 1'64\cdot\frac{2'9}{\sqrt{169}}\right) = \mathbf{(8'0442,\ 8'7758).}$$

b)
Determine el número mínimo de coches que debe componer una muestra, para obtener, con un nivel de confianza del 95%, un error de estimación menor que 0'35 años.

Datos del problema: σ = 2'9, E ≤ 0'35, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96\cdot 2'9}{0'35}\right)^2$ = 263'7376, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 264**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.
La producción diaria debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso.
La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola.
El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm.
Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material, para obtener la máxima ganancia y determine dicha ganancia.

Solución

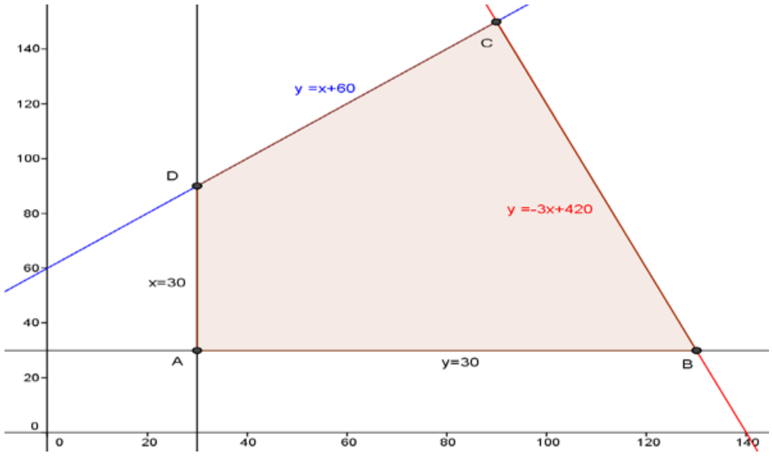
"x" = Número de toneladas de escayola.
"y" = Número de toneladas de yeso.

Función Objetivo **F(x,y) = 150x + 100y**. (Gana 150 € por Tm de escayola y 100 € por Tm de yeso).

Restricciones:
Como mínimo 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso → $x \ge 30$; $y \ge 30$
La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola → $y \le x + 60$.
El triple de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm. → $3x + y \le 420$

Las desigualdades $x \ge 30$; $y \ge 30$; $y \le x + 60$; $3x + y \le 420$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x = 30$; $y = 30$; $y = x + 60$; $3x + y = 420$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$$x = 30 \ ; \ y = 30; \quad y = x + 60; \quad y = -3x + 420$$
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 30$ e $y = 30$, tenemos el punto de corte es A(30,30)
De $y = 30$ e $y = -3x + 420$, tenemos $30 = -3x+420$, luego $3x = 390$ → $x = 130$, y el punto de corte es B(130,30)
De $x = -3x + 420$ e $y = x + 60$, tenemos $-3x+420 = x+60$, es decir $360 = 4x$, luego $x = 90$ e $y = 150$, y el punto de corte es C(90,150)
De $y = x+60$ y $x = 30$; tenemos $y = 90$, y el punto de corte es D(30,90)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(30,30), B(130,30), C(90,150) y D(30,90).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 150x + 100y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(30,30), B(130,30), C(90,150) y D(30,90). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(30,30) = 150(30) + 100(30) = 7500$; $F(130,30) = 150(130) + 100(30) = 22500$;
$\mathbf{F(90,150)} = 150(90) + 100(150) \mathbf{= 28500}$; $F(30,90) = 150(30) + 100(90) = 13500$;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 28500** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(90,150), es decir el máximo ingreso es de 28500 € y se alcanza produciendo 90 Tm de escayola y 150 Tm de yeso**.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en x = 1 y en x = 2.
b) (1 punto) Represéntela gráficamente.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad y derivabilidad de f en x = 1 y en x = 2.

Observando su gráfica vemos que es continua en R – {0}, y derivable en R – {0,2}. No obstante vamos a verlo con su dominio y límites.
Sabemos que si una función es derivables es continua, pero si no es continua tampoco es derivable.

x^2 es continua y derivable en R, en particular en x < 1.
1/x es continua y derivable en R – {0}, en particular en 1 < x < 2.
(x-1)/2 es continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 1 y x = 2.
f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2) = 1$;
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (1/x) = 1$, por tanto **f(x) es continua en x = 1**.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x)$.
$f(2) = \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (1/x) = 1/2$;
$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} ((x-1)/2) = 1/2$, por tanto **f(x) es continua en x = 2**.
Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} (2x) = 2$; $\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} (-1/x^2) = -1$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 1.**

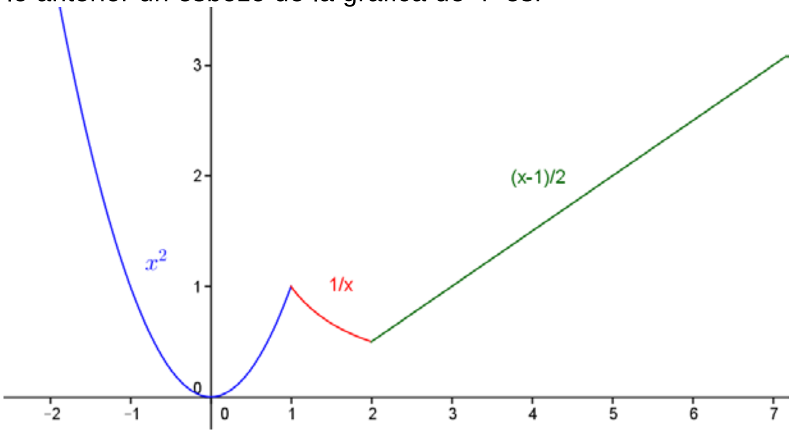
f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to2^-} f'(x) = \lim_{x\to2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to2^-} f'(x) = \lim_{x\to2^-} (-1/x^2) = -1/4$; $\lim_{x\to2^+} f'(x) = \lim_{x\to3^+} (1/2) = 1/2$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 2.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Recapitulando **f es derivable en R – {1,2}.**
b)
Represéntela gráficamente.

La gráfica de x^2 es una parábola con vértice (0,0) y las ramas hacia arriba ∪, porque el nº que multiplica a x^2 es positivo. Sólo la dibujamos en x ≤ 1 y vemos que en x = 1 vale 1.

La gráfica de 1/x es una hipérbola que tiene por asíntotas x = 0 (la vertical) e y = 0 (la horizontal), simétrica respecto al origen (0,0) que se dibuja en el I y III cuadrante, en nuestro caso sólo la dibujaremos entre 1 y 2, es decir pasa por los puntos $(1^+,1)$ y (2,1/2).
La gráfica de (x-1)/2 es una recta que no pasa por el origen, pero sólo la dibujamos a partir de x > 2, es decir una semirrecta. En $x = 2^+$ vale 1/2.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes. Se sabe que p(A) = 0'3, p(B) = 0'4.
Calcule las siguientes probabilidades:
a) (1 punto) p(A∪B).
b) (1 punto) $p(A/B^c)$.

Solución

Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes. Se sabe que p(A) = 0'3, p(B) = 0'4.
Calcule las siguientes probabilidades:
a)
p(A∪B).

Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B); $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Como A y B son independientes, tenemos p(A∩B) = p(A)·p(B) = 0'3·0'4 = 0'12

Tenemos **p(A∪B)** = p(A) + p(B) - p(A∩B) = 0'3 + 0'4 – 0'12 **= 0'58**.
b)
$p(A/B^c)$.

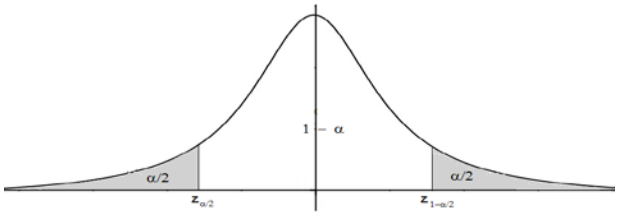
$$\mathbf{p(A/B^C)} = \frac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \frac{p(A) - p(A\cap B)}{1 - p(B)} = (0'3 – 0'12)/(1 – 0'4) \mathbf{= 0'3.}$$

EJERCICIO 3_B

En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37'1 ºC y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1'04 ºC.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional.
b) (1 punto) ¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36'8 ºC y 37'4 ºC?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\bar{x}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37’1 ºC y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1’04 ºC.
a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional.

Datos del problema: σ = 1’04; n = 64, $\bar{x}$ = 37’1, nivel de confianza = 90% = 0’90 = 1 - α, de donde α =
= 0’10, es decir $\alpha/2$ = 0’10/2 = 0’05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0’05 = 0’95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’95 no viene, y que una de las más próximas es 0’9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’64, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(37'1 - 1'64\cdot\frac{1'04}{\sqrt{64}}, 37'1 + 1'64\cdot\frac{1'04}{\sqrt{64}}\right) = \mathbf{(36'8868,\ 37'3132).}$$

b)
¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36’8 ºC y 37’4 ºC?

Datos del problema: Intervalo = (a,b) = (36’8, 37’4), σ = 1’04, n = 64.

De la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que (37’4 – 36’8) = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{1'04}{\sqrt{64}}$, es decir

$\mathbf{z_{1-\alpha/2}}$ = 0’6·8 /2’08 ≅ **2’31** y mirando en las tablas vemos que $p(Z \le 2'31)$ = 1 - $\alpha/2$ = 0’9896, por lo tanto tenemos que α = (1 – 0’9896)·2 = 0’0208, luego **el nivel de confianza pedido es = 1 - α = 1 – 0’0208 = = 0’9792 = 97’92%.**