OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

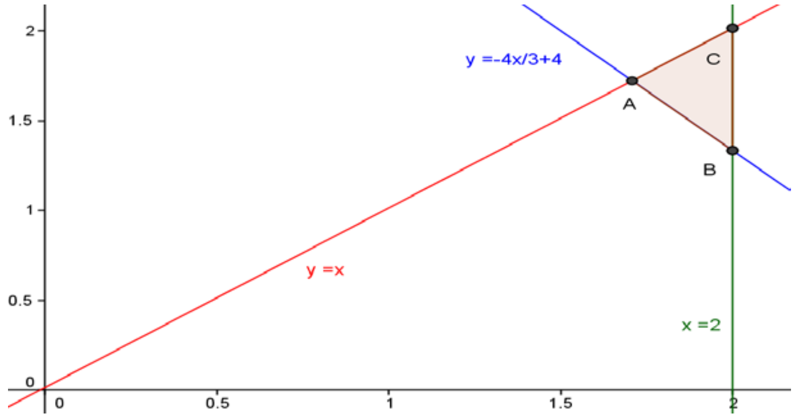
a) (2 puntos) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:
$x/3 + y/4 \geq 1$, $y \leq x$, $x \leq 2$. Determine sus vértices.
b) (1 punto) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y) = -x + 2y - 3$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

Solución

a) Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones:
$x/3 + y/4 \geq 1$, $y \leq x$, $x \leq 2$. Determine sus vértices.
b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y) = -x + 2y - 3$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.
(a) y (b)
Las desigualdades $x/3 + y/4 \geq 1$, $y \leq x$, $x \leq 2$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,
$x/3 + y/4 = 1$, $y = x$, $x = 2$.
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -4x/3 + 4, \quad y = x, \quad x = 2.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $y = x$ e $y = -4x/3+4$, tenemos $x = -4x/3+4$, luego $3x = -4x+12$, de donde $7x = 12$, es decir $x = 12/7$ e $y=12/7$, y el vértice es $A(12/7,12/7)$.
De $x = 2$ e $y = -4x/3+4$, tenemos $y = -8/3+4 = 4/3$, y el vértice es $B(2,4/3)$.
De $x = 2$ e $y = x$, tenemos $y = 2$, y el vértice es $C(2,2)$.

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son:
$A(12/7,12/7)$, $B(2,4/3)$ y $C(2,2)$.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores $A(12/7,12/7)$, $B(2,4/3)$ y $C(2,2)$. En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(12/7,12/7) = -(12/7) + 2(12/7) - 3 = -9/7 \cong -1'28$; $\mathbf{F(2,4/3)} = -(2) + 2(4/3) - 3 \mathbf{= -7/3 \cong -2'33}$;
$\mathbf{F(2,2)} = -(2) + 2(2) - 3 \mathbf{= -1}$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es -1** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(2,2), y el mínimo absoluto de la función F en la región es -7/3** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(2,4/3).**

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) (2 puntos) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie

su derivabilidad para el valor de k obtenido.
b) (1 punto) Dibuje la gráfica de la función para k = –1.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a)
(2 puntos) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

$-4x - 3$ es continua y derivable en R, en particular en x < -1.
$2x^2 - 1$ es continua y derivable en R, en particular en -1 < x < 1.
(k+2)/x es continua y derivable en R – {0}, en particular en x > 1.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = -1 y x = 1.
f(x) es continua en x = -1 si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.
$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-4x - 3) = -4(-1) - 3 = 1$;
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x^2 - 1) = 2(-1)^2 - 1 = 1$, por tanto **f(x) es continua en x = 1**.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 - 1) = 2(1)^2 - 1 = 1$;
$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ((k+2)/x) = (k+2)/x = k+2$, como me dicen que **f es continua en R, tenemos k+2=1, de donde k = -1**.
Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -1 \\ 4x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = -1 si $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} (-4) = -4$; $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} (4x) = -4$. Como los resultados coinciden, **f(x) es derivable en x = -1.**

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (4x) = 4$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-1/x^2) = -1/2$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 1.**

Recapitulando **f es derivable e R – {1}**. Luego $f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

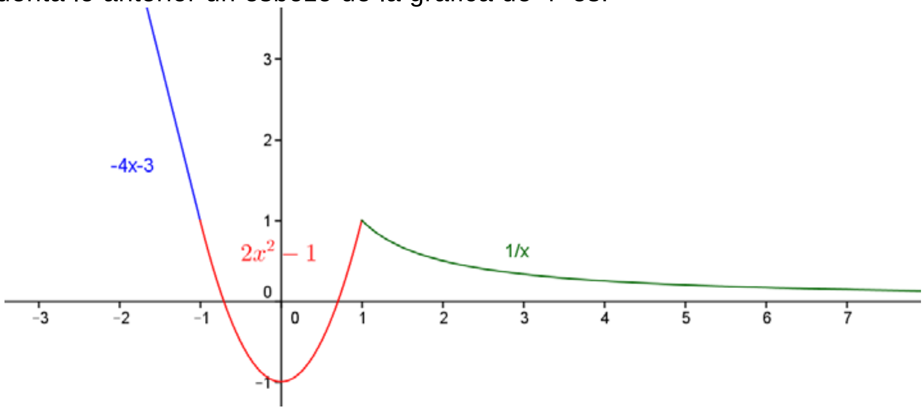
b)

Dibuje la gráfica de la función para k = –1. Ya hemos visto que $f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

La gráfica de -4x -3 es una recta que no pasa por el origen, pero sólo la dibujamos a partir de x ≤ -1, es decir una semirrecta. En x = -1 vale 1.

La gráfica de $2x^2 - 1$ es una parábola con vértice (0,-1) y las ramas hacia arriba ∪, porque el nº que multiplica a x^2 es positivo. Sólo la dibujamos en $-1 < x < 1$ y vemos que en $x = 1$ vale 1.
La gráfica de $1/x$ es una hipérbola que tiene por asíntotas $x = 0$ (la vertical, que no está en el dominio) e $y = 0$ (la horizontal) porque $\lim_{x\to+\infty} (1/x) = 1/\infty = 0$, simétrica respecto al origen (0,0) que se dibuja en el I y III cuadrante, en nuestro caso sólo la dibujaremos en $x \geq 1$, es decir pasa por los puntos (1,1).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

En una residencia hay 212 ancianos de los que 44 tienen afecciones pulmonares. Del total de ancianos, 78 son fumadores, y solo hay 8 que tienen enfermedad de pulmón y no fuman.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un anciano de esa residencia, elegido al azar, no fume y tampoco tenga afección pulmonar?
b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de enfermos de pulmón son fumadores?

Solución

En una residencia hay 212 ancianos de los que 44 tienen afecciones pulmonares. Del total de ancianos, 78 son fumadores, y solo hay 8 que tienen enfermedad de pulmón y no fuman.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que un anciano de esa residencia, elegido al azar, no fume y tampoco tenga afección pulmonar?

Llamemos A, A^C, F y F^C, a los sucesos siguientes, “ancianos con afecciones pulmonares”, “ancianos sin afecciones pulmonares”, "fumadores", y "no fumadores", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada. La suma de los totales coincide), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).
También se podría hacer por un diagrama de árbol.

	Fumadores = F	No fumadores = F^C	Totales
Con afecciones = A		8	44
Sin afecciones = A^C			
Totales	78		212

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Fumadores = F	No fumadores = F^C	Totales
Con afecciones = A	**36**	8	44
Sin afecciones = A^C	**42**	**126**	**168**
Totales	78	**134**	212

(a)

p(no fume y sin afección pulmonar)=$p(F^C \cap A^C) = \dfrac{\text{Total mo fuman y no tienen afeccion}}{\text{Total ancianos}}$ = 126/212 ≅ **0’594**.

b)
¿Qué porcentaje de enfermos de pulmón son fumadores?

p(enfermos de pulmón son fumadores) = p(F/A) = $\frac{p(F\cap A)}{p(A)}$ = $\frac{\text{Total enfermos y fumadores}}{\text{Total enfermos}}$ = 36/44 = ≅ 0'81818 **= 81'818%**

EJERCICIO 3_A

Parte II

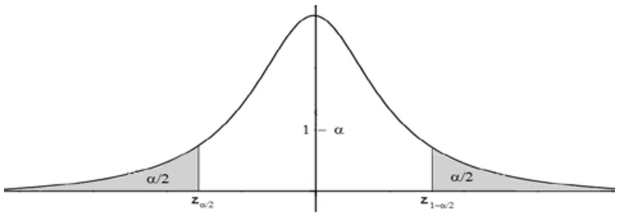
Se sabe que la desviación típica del peso de las naranjas que se producen en una determinada huerta es de 20 gramos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 naranjas de esa huerta, siendo su peso medio 200 gramos.

a) (0'75 puntos) Indique la distribución aproximada que siguen las medias de las muestras de ese tamaño y justifique su respuesta.

b) (1'25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el peso medio de las naranjas de esa huerta.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Se sabe que la desviación típica del peso de las naranjas que se producen en una determinada huerta es de 20 gramos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 naranjas de esa huerta, siendo su peso medio 200 gramos.

a) (0'75 puntos) Indique la distribución aproximada que siguen las medias de las muestras de ese tamaño y justifique su respuesta.

El Teorema Central del Límite nos afirma que si la variable poblacional X no sigue una ley normal, pero n ≥ 30 (que es nuestro caso) entonces la distribución de las medias muestrales $\overline{X}$ sigue una distribución normal de media la media de la población o de la muestra y de desviación típica la de la población partido la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, es decir $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Datos del problema: σ = 20; n = 100, $\overline{x}$ = 200.

Por tanto **la distribución de las medias de las muestras** $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(200, \frac{20}{\sqrt{100}})$ **= N(200,2)**

b)

Calcule un intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el peso medio de las naranjas de esa huerta.

Datos del problema: σ = 20, n = 100, $\overline{x}$ = 200, nivel de confianza = 95% = 0'95 = = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(200 - 1'96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 200 + 1'96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \right) = \mathbf{(196'08,\ 203'92)}$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$.

a) (1 puntos) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.
b) (2 puntos) Haciendo m = 0, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$ tiene inversa A^{-1} si su determinante det(A) = |A| es distinto de cero.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{vmatrix} = 3\cdot(m+1) - m\cdot(1-m) = 3m+3-m+m^2 = m^2 + 2m + 3$.

De |A| = 0, tenemos $m^2 + 2m + 3 = 0$, es decir $m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$, que no tiene raíces reales, por tanto $|A| \neq 0$ sea cual sea el valor de m, es **decir existe A^{-1} para cualquier valor de m**.

b)
Haciendo m = 0, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

En nuestro caso $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La fórmula de A^{-1} es $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$, luego existe A^{-1}; $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto

$\mathbf{A^{-1}} = (1/3)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $A \cdot X \cdot A = I_2$, por la derecha y por la izquierda por A^{-1} tenemos
$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot I_2\cdot A^{-1}$, es decir $I_2\cdot X\cdot I_2 = A^{-1}\cdot A^{-1}$, por tanto

$\mathbf{X = (A^{-1})^2 =} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ -4/9 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$.
a) (1'5 puntos) Halle a y b para que la función se anule en x = 1 y tenga un punto de inflexión en x = -1/2
b) (1'5 puntos) Para a = –3 y b = 2, calcule sus máximos y mínimos relativos.

Solución

Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$.
a)
Halle a y b para que la función se anule en x = 1 y tenga un punto de inflexión en x = -1/2

Como f se anula en x = 1 tenemos que **f(1) = o**.
Como f tiene punto de inflexión en x = -1/2, (sabemos que anula la 2ª derivada), luego **f ''(-1/2) = 0.**
$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$; $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$; $f''(x) = 12x + 2a$

De $f''(-1/2) = 0 \rightarrow 12(-1/2) + 2a = 0 \rightarrow -6 + 2a = 0$, de donde **a = 3.**
De $f(1) = 0 \rightarrow 2(1)^3 + (3)(1)^2 - 12(1) + b = 3 \rightarrow -7 + b = 0$, de donde **b = 7.**

b)
Para a = –3 y b = 2, calcule sus máximos y mínimos relativos.
Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada. Si la 2ª derivada es > 0 es un mínimo y si es < 0 es un máximo.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$; $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$; $f''(x) = 12x - 6$

De $f'(x) = 0$, tenemos $6x^2 - 6x - 12 = 0$, de donde $x^2 - x - 2 = 0$. Luego $x = \dfrac{1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2}}{2} = \dfrac{1\pm 3}{2}$, es decir los posibles extremos son x = 2 y x = -1.
Como $f''(2) = 12(2) – 6 = 18 > 0$, **x = 2 es un mínimo relativo que vale f(2)** $= 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 2$ **= -26.**
Como $f''(-1) = 12(-1) – 6 = -18 < 0$, **x = -1 es un máximo relativo que vale f(-1)**$=2(-1)^3- 3(-1)^2- 12(-1)+2$**=9.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

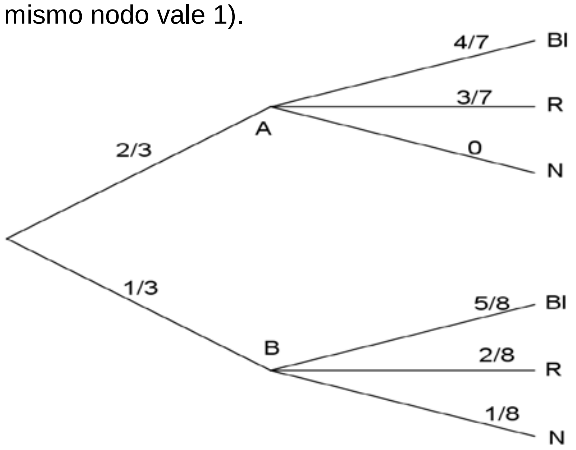
Disponemos de dos urnas A y B conteniendo bolas de colores. La urna A tiene 4 bolas blancas y 3 rojas, y la B tiene 5 blancas, 2 rojas y 1 negra. Lanzamos un dado, si sale 1, 2, 3 ó 4 extraemos una bola de A y si sale 5 ó 6 la extraemos de B.
a) (0'5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) (0'5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea negra.
c) (1 punto) Sabiendo que la bola extraída ha sido blanca, calcule la probabilidad de que en el dado haya salido 5 ó 6.

Solución

Disponemos de dos urnas A y B conteniendo bolas de colores. La urna A tiene 4 bolas blancas y 3 rojas, y la B tiene 5 blancas, 2 rojas y 1 negra. Lanzamos un dado, si sale 1, 2, 3 ó 4 extraemos una bola de A y si sale 5 ó 6 la extraemos de B.
a)
Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Llamemos A, B, Bl, R y N, a los sucesos siguientes, "sacar bola urna A", "sacar bola urna B", "sacar bola blanca", "sacar bola roja" y " sacar bola negra ", respectivamente.
Datos del problema p(A) = 4/6 = 2/3; p(B) = 1/3; p(Bl/A) = 4/7; p(R/A) = 3/7; p(Bl/B) = 5/8; p(R/B) = 2/8; p(N/A) = 1/8.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Usando el Teorema de la Probabilidad total,

p(R) = p(A).p(R/A) + p(B).p(R/B) = (2/3)·(3/7) + (1/3)·(2/8) **= 31/84 ≅ 0'369.**

b)
Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Usando el Teorema de la Probabilidad total,

p(N) = p(A).p(N/A) + p(B).p(N/B) = (2/3)·(0) + (1/3)·(1/8) **= 1/24 ≅ 0'04167.**

c)
Sabiendo que la bola extraída ha sido blanca, calcule la probabilidad de que en el dado haya salido 5 ó 6.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(B/Bl) = $\dfrac{p(B\cap Bl)}{p(Bl)} = \dfrac{p(B)\cdot p(Bl/B)}{p(A)\cdot p(Bl/A)+p(B)\cdot p(Bl/B)}$ = ((2/3)·(4/7)) /((2/3)·(4/7) + (1/3)·(5/8)) **= 64/99 ≅ 0'6465.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

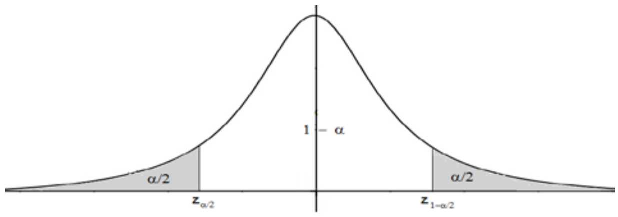
El tiempo que la población infantil dedica semanalmente a ver la televisión, sigue una ley Normal con desviación típica 3 horas. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 niños y, con un nivel de confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional.

a) (1'25 puntos) Calcule el error máximo cometido y el tiempo medio de la muestra elegida, sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza obtenido es 23'5 horas.

b) (0'75 puntos) Supuesto el mismo nivel de confianza, ¿cuál debería haber sido el tamaño mínimo de la muestra para cometer un error en la estimación inferior a media hora?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la *<u>media</u>* *es* $\overline{x}$ *= (a + b)/2, el* *<u>error máximo</u>* *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el* *<u>tamaño mínimo</u>* *de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

El tiempo que la población infantil dedica semanalmente a ver la televisión, sigue una ley Normal con desviación típica 3 horas. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 niños y, con un nivel de confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional.

a)

Calcule el error máximo cometido y el tiempo medio de la muestra elegida, sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza obtenido es 23'5 horas.

Datos del problema: σ = 3; n = 100, límite inferior = a = $\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 23'5, nivel de confianza = 97% = = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, es decir α/2 = 0'03/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'015 = 0'985. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto:

El error máximo cometido es E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2'17·(3)/(10) **= 0'651.**

El tiempo medio es: $\overline{x}$ = 23'5 + $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 23'5 + 0'651 **= 24'151.**

b)

Supuesto el mismo nivel de confianza, ¿cuál debería haber sido el tamaño mínimo de la muestra para cometer un error en la estimación inferior a media hora?

Datos del problema: σ = 3, E ≤ 1/2, $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17

De n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17\cdot 3}{1/2}\right)^2$ ≅ 169'5204, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 170**.