OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente.
La producción máxima mensual es de una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno.
Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

Solución

"x" = Número de gambas.
"y" = Número langostinos.
Función Objetivo **F(x,y) = 10x + 15y**. (vende gambas y langostinos a 10 y 15 € el kg, respectivamente).

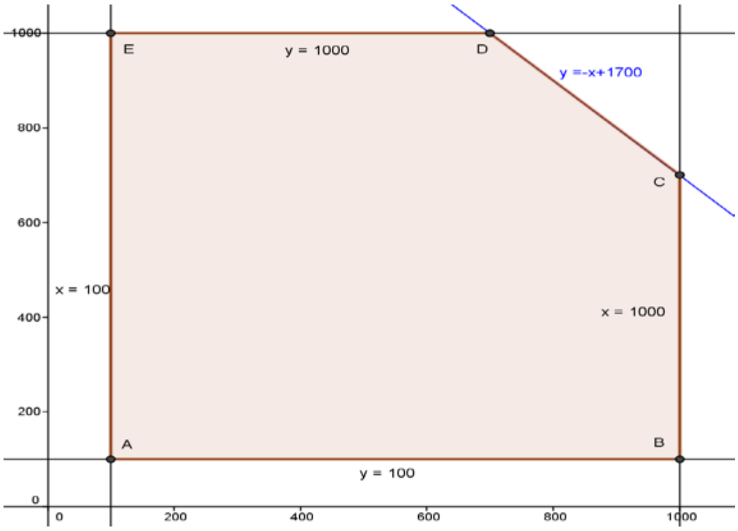
Restricciones:

La producción máxima mensual es de una tonelada de cada producto	→ $x \le 1000$; $y \le 1000$
La producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno	→ $x \ge 100$; $y \ge 100$.
La producción total es, a lo sumo, de 1700 kg.	→ $x + y \le 1700$

Las desigualdades $x \le 1000$; $y \le 1000$; $x \ge 100$; $y \ge 100$; $x + y \le 1700$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x = 1000$; $y = 1000$; $x = 100$; $y = 100$; $x + y = 1700$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$x = 1000$; $y = 1000$; $x = 100$; $y = 100$; $y = -x + 1700$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 100$ e $y = 100$, tenemos el punto de corte es A(100,100)
De $x = 1000$ e $y = 100$, tenemos el punto de corte es B(1000,100)
De $x = 1000$ e $y = -x + 1700$, tenemos $y = 700$, y el punto de corte es C(1000,700)
De $y = 1000$ e $y = -x + 1700$, tenemos $x = 700$, y el punto de corte es D(700,1000)
De $x = 100$ e $y = 1000$, tenemos el punto de corte es E(100,1000)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(100,100), B(1000,100), C(1000,700), D(700,1000) y E(100,1000).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 10x + 15y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(100,100), B(1000,100), C(1000,700), D(700,1000) y E(100,1000). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(100,100) = 10(100) + 15(100) = 2500$; $F(1000,100) = 10(1000) + 15(100) = 11500$;

F(1000,700) = 10(1000) + 15(700) = 20500; **F(700,1000)** = 10(700) + 15(1000) **= 22000**;
F(100,1000) = 10(100) + 15(1000) = 16000;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 22000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(700,1000), es decir el máximo ingreso es de 22000 € y se alcanza vendiendo 700 kg de gambas y 1000 kg de langostinos**.

EJERCICIO 2_A

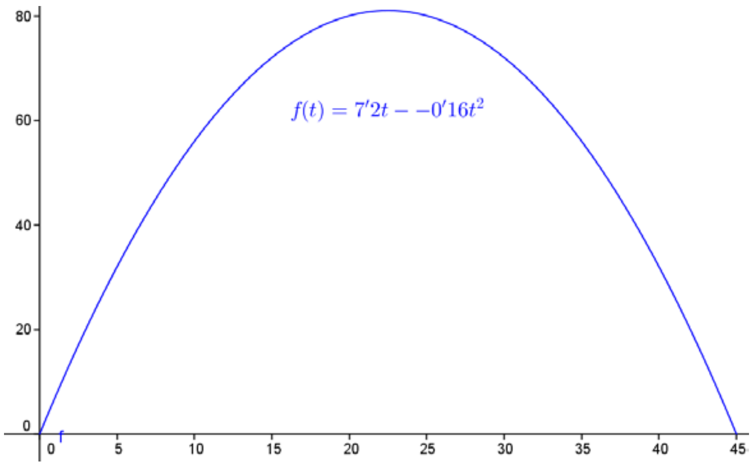
Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f : [0,45] \to R$ cuya expresión analítica es $f(t) = 7'2t - 0'16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.
a) (1'5 puntos) Represente gráficamente esta función.
b) (1'5 puntos) ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

Solución

Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f : [0,45] \to R$ cuya expresión analítica es $f(t) = 7'2t - 0'16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.
a)
Represente gráficamente esta función.

La gráfica de $f(t) = 7'2t - 0'16t^2$, es una parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a t^2 es negativo; abscisa de su vértice en $f'(t) = 0 = 7'2 – 0'32t \to t = 22'5$, es decir su vértice es V(22'5, f(22'5)) = V(22'5,81). Sus cortes con los ejes son:
Para t = 0, punto (0,0).
Para $f(t) = 0 = 7'2t - 0'16t^2 = t(7'2 - 0'16t) \to t = 0$ y $t = 45 \to$ puntos (0,0) y (45,0).
Me han dicho que la dibuje en [0,45]

Un esbozo del trozo de parábola es:



b)
¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

El máximo rendimiento del jugador se obtiene en el vértice V(22'5,81) es decir el máximo rendimiento es 81 y se obtiene en el minuto 22'5.
El rendimiento igual a 32 se obtiene resolviendo la ecuación $32 = 7'2t - 0'16t^2 \to 0'16t^2 - 7'2t + 32 = 0$, es decir $t^2 - 45t + 200 = 0 \to t = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4\cdot 200}}{2} = \frac{45 \pm 35}{2}$, de donde t = 5 y t = 40, es decir el rendimiento 32 se obtiene en los minutos 5 y 40.

EJERCICIO 3_A

<u>Parte I</u>
De dos sucesos A y B, asociados a un mismo experimento aleatorio, se conocen las probabilidades $p(B) = 0'7$, $p(A/B) = 0'8$ y $p(A\cap B^C) = 0'24$.
a) (0'5 puntos) Calcule $p(A\cap B)$

b) (1 punto) Halle p(A).
c) (0'5 puntos) Determine si A y B son independientes.

Solución

De dos sucesos A y B, asociados a un mismo experimento aleatorio, se conocen las probabilidades $p(B) = 0'7$, $p(A/B) = 0'8$ y $p(A\cap B^C) = 0'24$.

a)
Calcule $p(A\cap B)$

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Datos: $p(B) = 0'7$, $p(A/B) = 0'8 = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ y $p(A\cap B^C) = 0'24 = p(A) - p(A\cap B)$.

De $p(A/B) = 0'8 = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$, tenemos $\mathbf{p(A\cap B)} = 0'8\cdot p(B) = 0'8\cdot 0'7 = \mathbf{0'56}$.

b)
Halle p(A).

$p(A\cap B^C) = 0'24 = p(A) - p(A\cap B)$, tenemos $\mathbf{p(A)} = 0'24 + p(A\cap B) = 0'24 + 0'56 = \mathbf{0'8}$.

c)
Determine si A y B son independientes.

A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, pero $p(A\cap B) = 0'56 = p(A)\cdot p(B) = 0'8\cdot 0'7 = 0'56$, **por tanto A y B son independientes.**

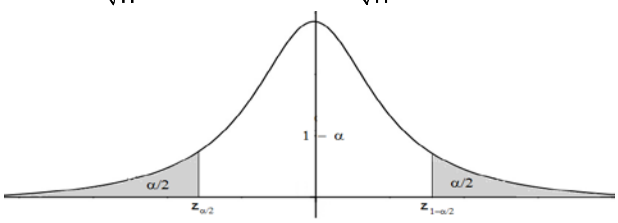
EJERCICIO 3_A

Parte II

Una variable aleatoria sigue una distribución Normal con desviación típica 15.
a) (1 punto) Construya un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99'5%, sabiendo que una muestra de 20 individuos tiene una media de 52.
b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra de esta población para que un intervalo de confianza, con nivel del 90%, para la media de la población tenga una amplitud inferior a 3 unidades?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x} = (a + b)/2$, el <u>error máximo</u> de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Una variable aleatoria sigue una distribución Normal con desviación típica 15.
a)
Construya un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99'5%, sabiendo que una muestra de 20 individuos tiene una media de 52.

Datos del problema: σ = 15; n = 20, $\overline{x}$ = 52, nivel de confianza = 99'5% = 0'995 = 1 - α, de donde α = = 0'005, es decir $\alpha/2$ = 0'005/2 = 0'0025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'0025 = 0'9975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'9975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'81, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(52 - 2'81\cdot\frac{15}{\sqrt{20}}, 52 + 2'81\cdot\frac{15}{\sqrt{20}}\right) \cong \mathbf{(42'575,\ 61'425).}$$

b)
¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra de esta población para que un intervalo de confianza, con nivel del 90%, para la media de la población tenga una amplitud inferior a 3 unidades?

Datos del problema: σ = 15, amplitud = b –a = 2E = 3, E ≤ 3/2 = 1'5, nivel de confianza = 90% = 0'90 = = 1 - α, de donde α = 0'10, es decir $\alpha/2$ = 0'10/2 = 0'05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, y que una de las más próximas es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'64\cdot 15}{1'5}\right)^2$ = 268'996, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 269**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1'5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

x -2y + z = 0,   2x + y -z = 5,   4x + 7y - 5z = 15.

b) (1'5 puntos) Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Solución

a)
Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

x -2y + z = 0,   2x + y -z = 5,   4x + 7y - 5z = 15.

Le aplicamos las transformaciones elementales de Gauss para obtener un sistema equivalente escalonado

x - 2y + z = 0	→	x - 2y + z = 0	→	x - 2y + z = 0
2x + y - z = 5 ($F_2 - 2F_1$)	→	5y - 3z = 5	→	5y - 3z = 5
4x + 7y - 5z = 15 ($F_3 - 4F_1$)	→	15y - 9z = 15($F_3 - 3F_2$)	→	0 = 0

Como nos han quedado dos ecuaciones con tres incógnitas **tenemos un sistema compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Tomando z = $\lambda \in R$ → 5y = 5 + 3λ → y = 1 + (3λ)/5. Entrando en la 1ª x = 2(1 + (3λ)/5) - λ = 2 + λ/5.

La solución del sistema es (x,y,z) = (2 + λ/5, 1 + 3λ/5, λ), con z = $\lambda \in$ R.

b)
Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Llamo $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Hay que resolver la ecuación X·A -2B = C → X·A = 2B + C.

Si la matriz A tiene inversa A^{-1} multiplicando por la derecha la expresión X·A = 2B + C, tenemos:

$X\cdot A\cdot A^{-1} = (2B + C)\cdot A^{-1}$ → $X\cdot I_2 = (2B + C)\cdot A^{-1}$ → $X = (2B + C)\cdot A^{-1}$

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ = 1 - 0 = 1 ≠ 0, luego existe A^{-1}, cuya fórmula es $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

|A| = 1; $\neq 0$, luego existe A^{-1}; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto $\mathbf{A^{-1}} = (1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego **X = (2B + C)·A^{-1}** $= \left(2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

a) (1'5 puntos) Indique el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1'5 puntos) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y represente la gráfica de la función.

Solución

Sea la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

a)
Indique el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

El **dominio** de definición es R – {solución de x + 1 = 0} **= R – {-1}.**
Cortes:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,-1).
Para f(x) = 0 $\rightarrow$ x – 1 = 0, de donde x = 1, punto (1,0).

Sabemos que la monotonía sale estudiando la primera derivada f '(x).
$f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$; $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.
De f '(x) = 0, tenemos **2 = 0**, lo cual es absurdo, por tanto **no hay extremos relativos** y la función siempre es estrictamente creciente o decreciente en su dominio.
De $f'(0) = \dfrac{2}{(0+1)^2} = 2 > 0$, vemos que f '(x) > 0 en su dominio R – {-1}, es decir **f(x) es *estrictamente creciente*** $(\nearrow)$ **en su dominio R – {1}.**

b)
Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y represente la gráfica de la función.

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en $\pm\infty$.

También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.), si el límite en dicho número es ∞, que también es nuestro caso.

Tenemos $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, cuya gráfica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H.

El número que anula el denominador (x + 1 = 0) es x = -1, y como $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{x - 1}{x + 1} = (-2)/0^- = +\infty$, **la recta x = -1 es una A.V. de f**. Además vemos que a la izquierda de x = -1, f está en $+\infty$.

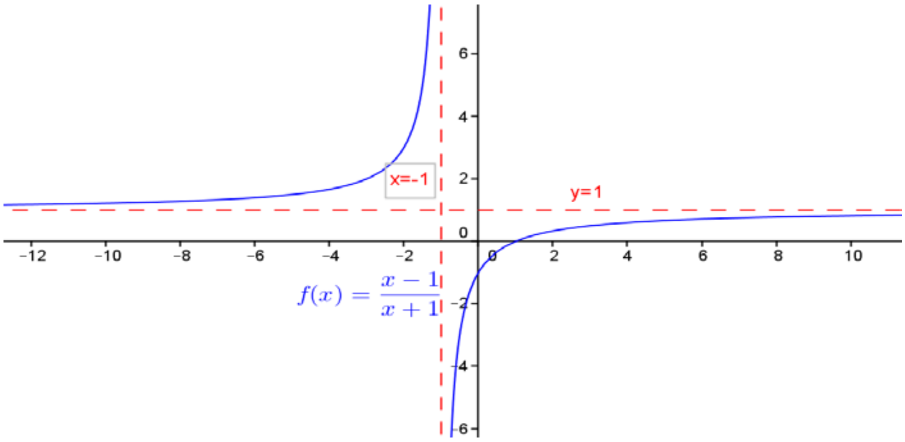
De $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x - 1}{x + 1} = (-2)/0^+ = -\infty$, vemos que a la izquierda de x = 1, f está en $-\infty$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x - 1}{x + 1} = \lim_{x\to +\infty} (x/x) = \lim_{x\to +\infty} (1/1) = 1$, **la recta y = 1 es una A.H. en $\pm\infty$.**

De $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1} - (1)\right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. en $+\infty$.

De $\lim_{x\to-\infty}$ (f(x) - A.H.) = $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1} - (1)\right) = 0^{+}$, tenemos que f está por encima de la A.H. en - ∞.

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules.

Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a) (0’5 puntos) Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules.

b) (1’5 puntos) Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?

Solución

En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules.

Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a)

Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules.

Llamemos V, M, A y A^C, a los sucesos siguientes, “varón”, “mujer”, "ojos azules", y "ojos no azules ", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada. La suma de los totales coincide), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

También se podría hacer por un diagrama de árbol.

	Varón = V	Mujer = M	Totales
Ojos azules = A	21	38	
Ojos no azules = A^C			
Totales	105		200

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Varón = V	Mujer = M	Totales
Ojos azules = A	21	38	**59**
Ojos no azules = A^C	**84**	**57**	**141**
Totales	105	**95**	200

(a)

p(tenga los ojos azules) = p(A)= $\frac{\text{Total ojos azules}}{\text{Total nacidos}}$ **= 59/200 ≅ 0’295**.

b)

Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?

p(si ojos azules, ¿es varón?) = p(V/A) = $\frac{p(V \cap A)}{p(A)}$ = $\frac{\text{Total varones y ojos azules}}{\text{Total ojos azules}}$ **= 21/59 ≅ 0'3559.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

Sea una población cuyos elementos son 1, 2, 3.
Mediante muestreo aleatorio simple se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2.
a) (0'75 puntos) Escriba las posibles muestras.
b) (1'25 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución

Sea una población cuyos elementos son 1, 2, 3.
Mediante muestreo aleatorio simple se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2.
a) Escriba las posibles muestras.
b) Calcule la varianza de las medias muestrales.
(a) y (b)

Población {1, 2, 3}
Muestras posibles = {*1-1, 1-2, 1-3, 2-1; 2-2, 2-3, 3-1, 3-2; 3-3*}. Hay 9.
Media de la población = μ = (1 + 2 + 3)/3 = 2.
Varianza de la población = $\sigma^2 = \Sigma(\text{elementos} - \mu)^2/3 = (1/3)\cdot[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2]$ **= 2/3.**
Desviación típica poblacional = $\sigma = \sqrt{(2/3)} = \sqrt{(2/3)}$.

Sabemos que la media poblacional μ es igual a la media poblacional μ_x, y que la desviación típica muestral σ_x coincide con la desviación típica poblacional dividido por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, es decir $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por tanto la varianza muestral es $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$.

Media poblacional $\mu_x = \mu = 2$.
Varianza muestral $\sigma_x^2 = \sigma^2/n = (2/3)/2$ **= 1/3 ≅ 0'3333.**