OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $(A - I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.
b) (1 punto) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$.
c) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X + B = C$.

Solución

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a)
Calcule $(A - I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

$(A - I_2)\cdot B = A\cdot A\cdot A = \left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

b)
Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$.

$B^t\cdot A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

c)
Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X + B = C$.

Si la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}, (podemos pasar de $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a la matriz $(I_2|A^{-1})$), podemos multiplicar la expresión matricial $A\cdot X + B = C$ por la izquierda por la matriz A^{-1}.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)_{F_2+F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)^{(-1)\cdot F_1}_{F_2/(2)} \approx \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2\end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$, por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

También la podíamos ver por la fórmula $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = det(A) = \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0$, luego existe A^{-1}; $A^t = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, luego

$A^{-1} = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

De $A\cdot X + B = C$, tenemos $A\cdot X = C - B$, luego $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(C - B) \rightarrow I_2\cdot X = A^{-1}\cdot(C - B) \rightarrow$
$\rightarrow X = A^{-1}\cdot(C - B)$

Luego $\mathbf{X} = A^{-1}\cdot(C - B) = (1/-2)\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right) = (1/-2)\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix} =$

$= (1/-2)\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix} = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6 & -6\\ 2 & -5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -1 & 5/2 & -2\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1\\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1\end{cases}$.

a) (1 punto) Analice su continuidad y su derivabilidad.
b) (1'5 puntos) Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.
c) (0'5 puntos) Represente la gráfica de la función.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1\\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1\end{cases}$.

a)
Analice su continuidad y su derivabilidad.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.

x^2 es una función continua y derivable en R, en particular en $x < 1$.
$-x^2 + 4x - 2$ es una función continua y derivable en R, en particular en $x \ge 1$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2) = (1)^2 = 1$;
$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = -(1)^2 + 4(1) - 2 = 1$, por tanto f(x) es continua en x = 1.

Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$., tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2(1) = 2$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2x + 4) = -2(1) + 4 = 1$. Como los resultados son iguales, **f(x) es derivable en x = 1.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

Recapitulando **f es derivable en R.**

b)
Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

Si x < 1, $f'(x) = 2x$.
De $f'(x) = 0$, tenemos $2x = 0$, de donde $x = 0$. Posible extremo.
Como $f'(-1) = 2(-1) = -2 < 0$, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,0)$
Como $f'(0'5) = 2(0'5) = 1 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(0,1)$
Por definición **x = 0 es un mínimo relativo y vale f(0) =** $(0)^2$ **= 0**.

Si x > 1, $f'(x) = -2x + 4$
De $f'(x) = 0$, tenemos $-2x + 4 = 0$, de donde $x = 2$. Posible extremo.
Como $f'(1'1) = -2(1'1) + 4 = 1'8 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1,2)$
Como $f'(3) = -2(3) + 4 = -2 < 0$, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(2,+\infty)$
Por definición **x = 2 es un máximo relativo y vale f(2) =** $-(2)^2 + 4(2) - 2$ **= 2**.

Nos están pidiendo los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión; es decir el estudio de la segunda derivada.

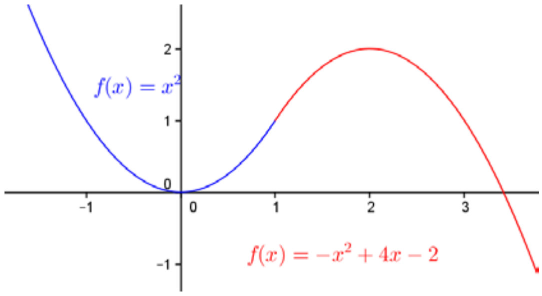
$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Si x < 1, $f''(x) = 2 > 0$, tenemos que **f(x) es convexa ($\cup$) en el intervalo ($-\infty$,1)**
De $f''(x) = 0$, tenemos $6x = 0$, de donde $x = 0$. Posible punto de inflexión.

Si x > 1, $f''(x) = -2 < 0$, luego **f(x) es cóncava ($\cap$) en el intervalo (1,$+\infty$).**
Por definición **x = 1 es un punto de inflexión y vale f(1)** $= -(1)^2 + 4(1) - 2$ **= 1.**

c)
Represente la gráfica de la función.

Teniendo en cuanta la anterior y que ambas ramas de la función son trozos de parábola, x^2 con vértice en (0,0) y $-x^2 + 4x - 2$ con vértice en (2,2), un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

Sean A y B dos sucesos tales que p(A) = 0'4, $p(B^C)$ = 0'7 y p(AUB) = 0'6, donde B^C es el suceso contrario de B.

a) (1 punto) ¿Son independientes A y B?

b) (1 punto) Calcule $p(A/B^C)$.

Solución

Sean A y B dos sucesos tales que p(A) = 0'4, $p(B^C)$ = 0'7 y p(AUB) = 0'6, donde B^C es el suceso contrario de B.

a)

¿Son independientes A y B ?

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden ver si A y B son independientes, es decir si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

De $p(B^C)$ = 0'7 $\rightarrow$ 1 – p(B) = 0'7, de donde p(B) = 0'3.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos 0'6 = 0'4 + 0'3 - $p(A\cap B)$, luego $p(A\cap B)$ = 0'1

Como $p(A\cap B)$ = 0'1 $\neq$ **$p(A)\cdot p(B)$** = 0'4·0'3 = 0'12, **los sucesos no son independientes.**

b)

Calcule $p(A/B^C)$.

Me piden **$p(A/B^C)$** = $\dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A)-p(A\cap B)}{p(B^C)}$ = (0'4 – 0'1)/(0'7) = 3/7 **= 0'4286.**

EJERCICIO 3_A

Parte II

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que dicha duración, en días, sigue una ley Normal de media 3'8 y desviación típica 1.

Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:

a) (1 punto) La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4'1 y 4'3 días.

b) (1 punto) La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3'35 días.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir Z = $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que dicha duración, en días, sigue una ley Normal de media 3'8 y desviación típica 1.

Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:

a)

La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4'1 y 4'3 días.

Datos del problema: Distribución de la población $\rightarrow$ N(μ,σ) = N(3'8,1); μ = 3'8; σ = 1; n = 16;

La distribución muestral de las medias es $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(3'8, \frac{1}{\sqrt{16}}) = N(3'8, 1/4) = N(3'8, 0'25)$

Me están pidiendo la probabilidad "$p(4'1 \le \overline{X} \le 4'3)$"

Luego $\mathbf{p(4'1 \le \overline{X} \le 4'3)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{4'1 - 3'8}{0'25} \le Z \le \frac{4'3 - 3'8}{0'25}) \cong p(1'2 \le Z \le 2) =$

$= p(Z \le 2) - p(Z \le 1'2)$ = {Mirando en la tabla} = 0'9772 – 0'8888 **= 0'0884**.

b)

La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3'35 días.

Me están pidiendo la probabilidad "$p(\overline{X} \le 3'35)$"

Luego $\mathbf{p(\overline{X} \le 3'35)}$ = {tipificamos} = $p(Z \le \frac{3'35 - 3'8}{0'25}) = p(Z \le -1'8) = 1 - p(Z \le 1'8)$ = {Mirando en la tabla} =

= 1 – 0'9641 **= 0'0359**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 3x + 5y, en el recinto del plano determinado por las inecuaciones:

$x \ge 0;\quad y \ge 0;\quad 3x - 2y \ge 10;\quad 2x + 3y \le 24;\quad x - 5y \ge -1.$

Solución

Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 3x + 5y, en el recinto del plano determinado por las inecuaciones:

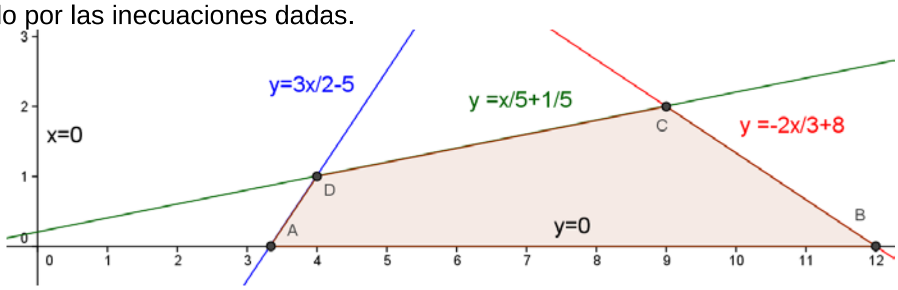
$x \ge 0;\quad y \ge 0;\quad 3x - 2y \ge 10;\quad 2x + 3y \le 24;\quad x - 5y \ge -1.$

Las desigualdades $x \ge 0$; $y \ge 0$; $3x - 2y \ge 10$; $2x + 3y \le 24$; $x - 5y \ge -1$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x = 0$; $y = 0$; $3x – 2y = 10$; $2x + 3y = 24$; $x – 5y = -1$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$x = 0;\quad y = 0;\quad y = 3x/2 - 5;\quad y = -2x/3 + 8;\quad y = x/5 + 1/5.$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 3x/2 - 5$ e $y = 0$, tenemos $3x/2 = 5$, luego $x = 10/3$ y el vértice es A(10/3,0).

De $y = 0$ e $y = -2x/3 + 8$, tenemos $2x/3 = 8$, luego $x = 12$ y el vértice es B(12,0).

De $y = -2x/3 + 8$ e $y = x/5 + 1/5$, tenemos $-2x/3 + 8 = x/5 + 1/5 \to -10x + 120 = 3x + 3 \to$
$\to 117 = 13x \to x = 9$, de donde $y = 2$, y el vértice es C(9,2).

De $y = x/5 + 1/5$ e $y = 3x/2-5$, tenemos $x/5 + 1/5 = 3x/2 - 5 \to 2x + 2 = 15x - 50 \to 52 = 13x \to x = 4$, de donde $y = 1$, y el vértice es D(4,1).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(10/3,0), B(12,0), C(9,2) y D(4,1).

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(10/3,0), B(12,0), C(9,2) y D(4,1). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(10/3,0) = 3(10/3) + 5(0) = **10**; F(12,0) = 3(12) + 5(0) = 36;
F(9,2) = 3(9) + 5(2) **= 37**; F(4,1) = 3(4) + 5(1) = 17.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 37** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(9,2), y el mínimo absoluto de la función F en la región es 10** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(10/3,0).**

EJERCICIO 2_B

Sea la función f(x) = $-x^3 + 6x^2 - 9x$.
a) (1 punto) Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.
b) (1 punto) Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.
c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

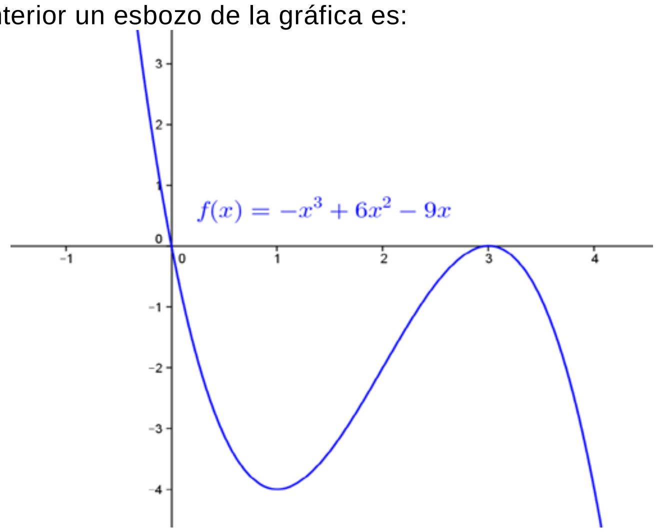
Solución

Sea la función f(x) = $-x^3 + 6x^2 - 9x$.
a)
Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada.
$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$; $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 = x^2 - 4x + 3 = 0$, de donde las soluciones son x = 1 y x = 3, que serán los posibles extremos relativos.
Como $f'(0) = -3(0)^2 + 12(0) - 9 = -9 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-∞,1).**
Como $f'(2) = -3(2)^2 + 12(2) - 9 = 3 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1,3).**
Como $f'(4) = -3(4)^2 + 12(4) - 9 = -9 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (3,+∞).**
Por definición **en x = 1 hay un mínimo relativo que vale f(1)** = $-(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1)$ **= -4.**
Por definición **en x = 3 hay un máximo relativo que vale f(3)** = $-(3)^3 + 6(3)^2 - 9(3)$ **= 0.**
b)
Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f '(x)
$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$; $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f''(x) = -6x + 12$
De $f''(x) = 0$, tenemos $-6x + 12 = 0$, luego x = 2, que es un posible punto de inflexión.
Como $f''(0) = -6(0) + 12 = 12 > 0$, **f(x) es convexa (∪)en (-∞,2)**.
Como $f''(3) = -6(3) + 12 = -6 < 0$, **f(x) es cóncava (∩) en (2,+∞)**.
Por definición **x = 2 es un punto de inflexión que vale f(2)** = $-(2)^3 + 6(2)^2 - 9(2)$ **= -24.**
c)
Represente gráficamente la función.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60% son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73%. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0'62.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.
b) (1 punto) Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

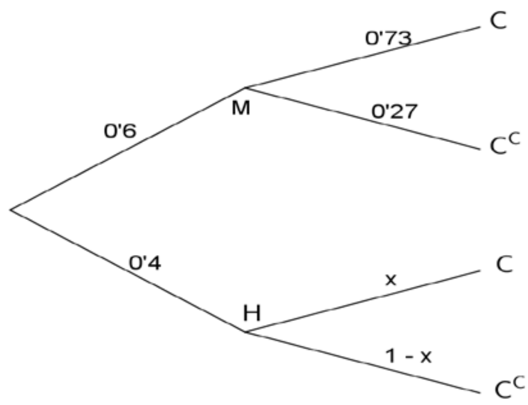
Solución

Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60% son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73%. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0'62.

Llamemos M, H, C y C^C, a los sucesos siguientes, "ser mujer", "ser hombre", "vivir en la ciudad" y "no vivir en la ciudad", respectivamente.

Datos del problema p(M) = 60% = 0'6; p(C/M) = 73% = 0'73; p(C) = 0'62.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:
p(C) = 0'62 = p(M).p(C/M) + p(H).p(C/H) = (0'6)·(0'73) + (0'4)·(x), de donde **x** = (0'62 – 0'6·0'73)/0'4 = **0'455**.

Me piden **p(C/H)** = x **= 0'455.**
b)
Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(M/C) =} \frac{p(M\cap C)}{p(C)} = \frac{p(M).p(C/M)}{p(C)} = (0'6)\cdot(0'73):(0'62) \cong \textbf{0'70645}.$$

EJERCICIO 3_B

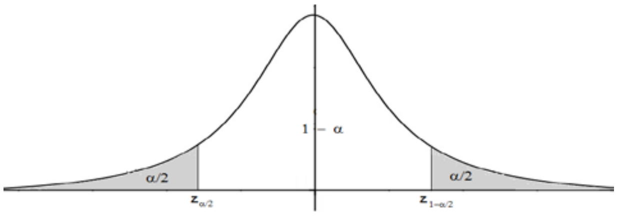
Parte II

Se sabe que la velocidad de los coches que circulan por una carretera es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 12 km/hora.
a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 400 coches que da una velocidad media de 87 km/hora. Obtenga un intervalo con un 95% de confianza, para la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera.
b) (1 punto) Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera, con un error inferior a 1 km/hora para un nivel de confianza del 99%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Se sabe que la velocidad de los coches que circulan por una carretera es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 12 km/hora.

a)

Se toma una muestra aleatoria de 400 coches que da una velocidad media de 87 km/hora. Obtenga un intervalo con un 95% de confianza, para la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera.

Datos del problema: $\sigma = 12$, $n = 400$, $\overline{x} = 87$, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(87 - 1'96\cdot\frac{12}{\sqrt{400}}, 87 + 1'96\cdot\frac{12}{\sqrt{400}}\right)$$ **= (85'824, 88'176).**

b)

Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera, con un error inferior a 1 km/hora para un nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: $\sigma = 12$, error $E \le 1$, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de las más próximas es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'57, por tanto el tamaño mínimos de la muestra es:

.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot 12}{1}\right)^2$ = 951'1056, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 952**.