OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1'3 euros la unidad.
En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10'5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.

Solución

"x" = Número de trufas dulces.
"y" = Número de trufas amargas.
Función Objetivo **F(x,y) = 1x + 1'3y**. (Vende la trufa dulce a 1 € y la trufa amarga a 1'3 €)
Restricciones:

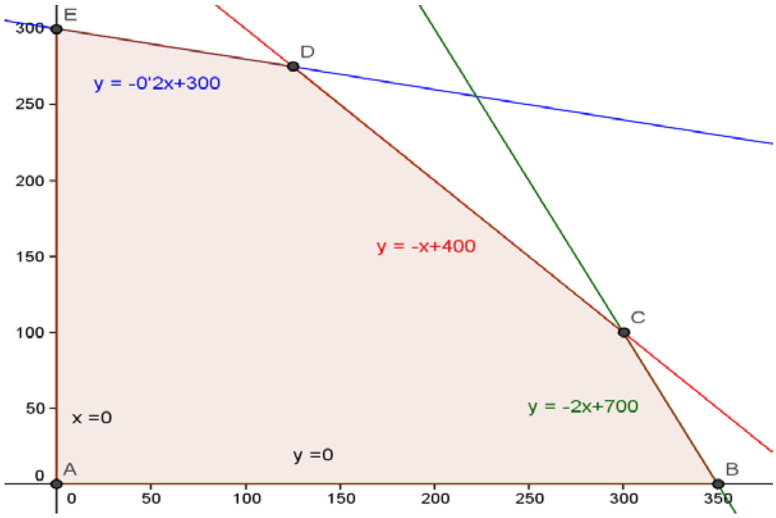
	Trufa dulce	Trufa amarga	Cantidad
Cacao	0'02	0'1	30 kg
Nata	0'02	0'02	8 kg
Azúcar	0'03	0'015	10'5 kg

Cacao (hay 20 kg): trufa dulce 0'02 kg y trufa amarga 0'1 kg → $0'02x + 0'1y \le 30$.
Nata (hay 8 kg): trufa dulce 0'02 kg y trufa amarga 0'02 kg → $0'02x + 0'02y \le 8$.
Azúcar (hay 10'5 kg): trufa dulce 0'03 kg y trufa amarga 0'015 kg → $0'03x + 0'015y \le 10'5$.
Se elabora alguna trufa dulce y alguna trufa amarga. → $x \ge 0$ e $y \ge 0$

Las desigualdades $0'02x + 0'1y \le 30$; $0'02x + 0'02y \le 8$; $0'03x + 0'015y \le 10'5$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas **son rectas,**
$0'02x + 0'1y = 30$; $0'02x + 0'02y = 8$; $0'03x + 0'015y = 10'5$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = -0'2x + 300$; $y = -x + 400$; $y = -2x + 700$; $x = 0$; $y = 0$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $y = 0$ e $y = -2x + 700$, tenemos $x = 350$, y el punto de corte es B(350,0)
De $x = -2x + 700$ e $y = -x + 400$, tenemos $-2x+700 = -x+400$, es decir $x = 300$, y el punto de corte es C(300,100)
De $y = -x+400$ e $y = -0'2x+300$; tenemos $-x+400 = -2x/10+300$, es decir $-10x+4000 = -2x+3000$, por tanto $1000 = 8x$, luego $x = 125$ e $y = 275$, y el punto de corte es D(125,275)
De $x = 0$ e $y = -0'2x+300$, tenemos el punto de corte es E(0,300)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(350,0), C(300,100), D(125,275) y E(0,300).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = x + 1'3y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(350,0), C(300,100), D(125,275) y E(0,300). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = (0) + 1'3(0) =0; F(350,0) = (350) + 1'3(0) = 350; F(300,100) = (300) + 1'3(100) = 430;
F(125,275) = (125) + 1'3(275) = **482'5**; F(0,300) = (0) + 1'3(300) = 390;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 482'5** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(125,275), es decir el máximo ingreso es de 482'5 € y se alcanza elaborando 125 trufas dulces y 275 trufas amargas**.

EJERCICIO 2_A

Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :

a) (0'75 puntos) $f(x) = \frac{3x-1}{x} - (5x - x^2)^2$. b) (0'75 puntos) $g(x) = (x^2 - 1).L(x)$

c) (0'75 puntos) $h(x) = 2^{5x}$. d) (0'75 puntos) $i(x) = (x^3 - 6x).(x^2 + 1)^3$.

Solución

Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x} - (5x - x^2)^2$. b) $g(x) = (x^2 - 1).L(x)$ c) $h(x) = 2^{5x}$. d) $i(x) = (x^3 - 6x)\cdot(x^2 + 1)^3$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}\cdot f'(x)$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$;

$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $(a^{f(x)})' = a^{f(x)}\cdot \ln(a)\cdot f'(x)$.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x} - (5x - x^2)^2$.

$$f'(x) = \frac{3x - (3x-1)}{x^2} - 2(5x - x^2)(5 - 2x) = \frac{1}{x^2} - 2(5x - x^2)(5 - 2x).$$

b) $g(x) = (x^2 - 1).L(x)$

$$g'(x) = 2x\cdot L(x) + (x^2 - 1)\cdot \frac{1}{x} = 2x\cdot L(x) + \frac{x^2-1}{x}.$$

c) $h(x) = 2^{5x}$.

$h'(x) = 2^{5x}\cdot \ln(2)\cdot 5 = 5\cdot \ln(2)\cdot 2^{5x}$.

d) $i(x) = (x^3 - 6x)\cdot(x^2 + 1)^3$.

d) $i'(x) = (3x^2 - 6)\cdot(x^2 + 1)^3 + (x^3 - 6x)\cdot 3\cdot(x^2 + 1)^2\cdot(2x)$

EJERCICIO 3_A

Parte I

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?

b) (1 punto) Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

Solución

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?

Sean "i - j" el suceso "salir en un dado el nº "i" y en el otro el nº "j" ".

Sabemos que al lanzar un dos dados distintos los resultados posibles son 6x6 = 36.
Para que el producto sea 6, los casos posibles son: 1 - 6, 6 – 1, 2 – 3 y 3 – 2.

Sabemos que p(A) = $\dfrac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$.

Me piden p(el producto de los n^{os} sea “6”) = $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$ = 4/36 = 1/9.

b)
Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

Para que el producto sea 4, los casos posibles son: 1 - 4, 4 – 1 y 2 – 2.

Me piden p(el producto ha sido 4, igual puntuación”) = $\dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$ = 1/3.

EJERCICIO 3_A

Parte II

Dada la población de elementos {3, 4, 5, 8}, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.
a) (0’5 puntos) Escriba todas las muestras posibles.
b) (0’75 puntos) Calcule la varianza de la población.
c) (0’75 puntos) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución

Dada la población de elementos {3, 4, 5, 8}, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.

Escriba todas las muestras posibles. Calcule la varianza de la población. Calcule la varianza de las medias muestrales
(a), (b) y (c)

Población {3, 4, 5, 8}
Muestras posibles = {3-3, 3-4, 3-5, 3-8; *4-3, 4-4, 4-5, 4-8*; 5-3, 5-4, 5-5, 5-8; *8-3, 8-4, 8-5, 8-8*}. Hay 16 muestras de tamaño n = 2.
Media de la población = μ = (3 + 4 + 5 + 6)/4 = 5.
Varianza de la población = $\sigma^2 = \Sigma(\text{elementos} - \mu)^2/4 = (1/4)\cdot[(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2] =$
$= (1/4)\cdot(2^2 + 1^2 + 0^2 + 3^2) = 14/4$ **= 3’5**

Sabemos que la media poblacional μ es igual a la media muestral μ_x, y que la desviación típica muestral σ_x coincide con la desviación típica poblacional dividido por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra n, es decir $\sigma_x = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Por tanto la varianzas verifican $\sigma_X{}^2 = \sigma^2/n$ = 3’5/2 = 1’75, es decir **la varianza de las muestras es $\sigma_X{}^2$ =1’75.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) De una matriz *A* se sabe que su segunda fila es (-1 2) y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Halle los restantes elementos de *A* sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución

De una matriz *A* se sabe que su segunda fila es (-1 2) y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Halle los restantes elementos de *A* sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sabemos que para multiplicar matrices el nº de columnas de la 1ª debe de coincidir con el nº de filas de la 2ª, por tanto A tiene que ser de orden 3x2, es decir A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

Como la segunda fila es (-1 2) y su segunda columna es tenemos A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \\ e & -3 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \\ e & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{pmatrix} a+e-1 & 0 \\ 2a+e & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Igualando miembro a miembro tenemos:
a+e-1 = 0
2a+e = 0. Restando tenemos a + 1 = 0, de donde **a = -1 y e = 2,** y la matriz pedida es **A =** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_B

De una función *f* se sabe que su función derivada es f '(x) = $3x^2 - 9x + 6$.
a) (1'5 puntos) Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.
b) (1'5 puntos) Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por (0,1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Solución

De una función *f* se sabe que su función derivada es f '(x) = $3x^2 - 9x + 6$.
a)
Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada.
f '(x) = $3x^2 - 9x + 6$.
De f'(x) = 0 $\rightarrow$ $3x^2 - 9x + 6 = 0 = x^2 - 3x + 2 = 0$, de donde las soluciones son x = 1 y x = 2, que serán los posibles extremos relativos.
Como f'(0) = $3(0)^2 - 9(0) + 6 = 6 > 0$, **f es estrictamente creciente** ($\nearrow$) **en (-∞,1).**
Como f'(1'5) = $3(1'5)^2 - 9(1'5) + 6 = -0'75 < 0$, **f es estrictamente decreciente** ($\searrow$) **en (1,2).**
Como f'(3) = $3(3)^2 - 9(3) + 6 = 6 > 0$, **f es estrictamente creciente** ($\nearrow$) **en (2,+∞).**
Por definición **en x = 1 hay un máximo relativo.**
Por definición **en x = 2 hay un mínimo relativo.**

Sabemos que la curvatura es el estudio de la segunda derivada f '(x)

f '(x) = $3x^2 - 9x + 6$, f ''(x) = 6x – 9.

De f ''(x) = 0, tenemos 6x - 9 = 0, luego x = 3/2 = 1'5, que es un posible punto de inflexión.
Como f ''(0) = 6(0) - 9 = - 9 < 0, **f(x) es cóncava (∩) en (-∞,1'5)**.
Como f ''(2) = 6(2) - 9 = 3 > 0, **f(x) es convexa (∪) en (1'5,+∞)**.
Por definición **x = 1'5 es un punto de inflexión.**
b)
Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por (0,1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

La recta tangente en x = 0 es "y – f(0) = f '(0)·(x – (0))".
Me dicen que f(0) = 1 (pasa por el punto (0,1)). De f '(x) = $3x^2 - 9x + 6$ tenemos f'(0) = 6, y **la recta tangente pedida es y – 1 = 6·(x), es decir y = 6x + 1.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario A, el 25% lee el diario B y el 50% lee al menos uno de los dos diarios.
a) (0'5 puntos) Los sucesos "leer el diario A" y "leer el diario B" ¿son independientes?
b) (0'5 puntos) Entre los que leen el diario A, ¿qué porcentaje lee también el diario B?
c) (0'5 puntos) Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?
d) (0'5 puntos) Entre los que no leen el diario A, ¿qué porcentaje lee el diario B?

Solución

En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario A, el 25% lee el diario B y el 50% lee al menos uno de los dos diarios.
a)
Los sucesos "leer el diario A" y "leer el diario B" ¿son independientes?

Sean los sucesos A y B los sucesos "leer el diario A" y "leer el diario B" respectivamente.
El problema nos dice que p(A) = 40% = 0'4, p(B) = 25% = 0'25 y p(A ó B) = p(A∪B) = 50% = 0'5.

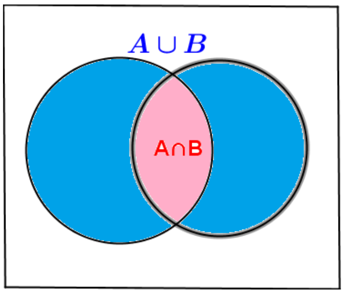
Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; p(A y noB) = $p(A\cap B^C)$ = p(A) - p(A∩B); A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)· p(B); $p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B).

Me piden ver si A y B son independientes, es decir si p(A∩B) = p(A)·p(B).
De p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) tenemos 0'5 = 0'4 + 0'25 - p(A∩B), luego p(A∩B) = 0'15.
Como **p(A∩B) = 0'15 ≠** p(A)·p(B) = 0'4·0'25 = **0'1, los sucesos A y B no son independientes.**
b)
Entre los que leen el diario A, ¿qué porcentaje lee también el diario B?

Me piden en porcentaje **p(B/A)** = $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ = 0'15/ 0'4 **= 0'375 = 37'5 %.**
c)
Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?

Mirando la figura (diagrama de Venn) se observa que:

(A∩B)∩(A∪B) = (A∩B)



Me piden en porcentaje **p(A∩B/A∪B)** = $\frac{p((A \cap B) \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)}$ = 0'15/0'5 **= 0'3 = 30 %.**
d)
Entre los que no leen el diario A, ¿qué porcentaje lee el diario B?

Me piden en porcentaje **$p(B/A^C)$** = $\frac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)}$ = (0'25 - 0'15/(1 - 0'4) **= 1/6 = 0'1667 =**

= 16'67 %.

EJERCICIO 3_B

Parte II

El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7'29.
a) (0'5 puntos) Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
b) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7'82 y 8'36 horas?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir Z = $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7'29.

a)

Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

Datos del problema: Distribución de la población $\rightarrow$ N(μ,σ) = N(8, σ); **μ = 8**; σ^2 = 7'29; **σ = 2'7**; n = 36.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(8, \frac{2'7}{\sqrt{36}})$ **= N(8, 0'45).**

b)

¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7'82 y 8'36 horas?

Me están pidiendo la probabilidad "p(7'82 ≤ $\overline{X}$ ≤ 8'36)"

Luego p(7'82 ≤ $\overline{X}$ ≤ 8'36) = {tipificamos} = p($\frac{7'82 - 8}{0'45} \le Z \le \frac{8'36 - 8}{0'45}$) = p(- 0'4 ≤ Z ≤ 0'8) =

= p(Z ≤ 0'8) - p(Z ≤ - 0'4) = p(Z ≤ 0'8) - (1 - p(Z ≤ 0'4)) = {Mirando en la tabla} = 0'7881 - (1 - 0'6554) **=**
= 0'4435.