OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2 puntos) Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004}.

Solución

a)
Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

Sea x = precio kilo de tomates
Sea y = precio kilo de carne
Sea z = precio kilo de gambas

De *el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne* $\rightarrow$ $x = y/2$
De *el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne* $\rightarrow$ $z = 2y$
De *pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas* $\rightarrow$ $18 = 3x+y+0'25z$

Piden cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas, es decir:
$x + 2y + 0'5\,z$

$18 = 3x + y + 0'25z$; $x = y/2$; $z = 2y$ $\rightarrow$ $18 = 3(y/2) + y + 0'25(2y) = 3y/2 + y + 0'5y = 3$, de donde:
$y = 18/3 = 6$ €, $x = (6)/2 = 3$ € y $z = 2(6) = 12$ €, por tanto $x + 2y + 0'5z = 3 + 2(6) + 0'5(12) = 21$ €, es decir **pagaríamos 21 € por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas.**

b)
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004}.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Luego $A^{2004} = (A^2)^{1002} = (I_2)^{1002} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

a) (1'25 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) (1'25 puntos) ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?

c) (0'5 puntos) Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halle *a* para que el valor mínimo de *g* sea 3.

Solución

a)
Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

La recta tangente en $x = 2$ es "$y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2)$".

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $f'(x) = \dfrac{0 - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Luego $f(2) = 1/1 = 1$ y $f'(2) = -1/(1)^2 = -1$, y **la recta tangente pedida es $y - 1 = -1\cdot(x - 2) = -x + 2$, es decir $y = -x + 3$.**

b)
¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?

Sabemos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la pendiente de la recta y = 3x – 5 es y' = 3, y la recta tangente a la gráfica de f tiene de pendiente genérica f'(x) = 4x + 3. Igualando tenemos: 3 = 4x + 3, de donde x = 0 y **el punto pedido es (0,f(0)) = (0,1).**

c)
Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halle *a* para que el valor mínimo de *g* sea 3.

Sabemos que la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 8x + a$ es una parábola con las ramas hacia arriba (∪), y el mínimo se encuentra en el vértice de la parábola; además los extremos relativos anulan la 1ª derivada g '(x).
$g(x) = 2x^2 - 8x + a$; $g'(x) = 4x - 8$.

De g '(x) = 0 → 4x – 8 = 0, de donde x = 2.
Como el valor mínimo de *g* es 3 tenemos $g(2) = 3 = 2(2)^2 - 8(2) + a = -8 + a$, de donde **a = 11.**

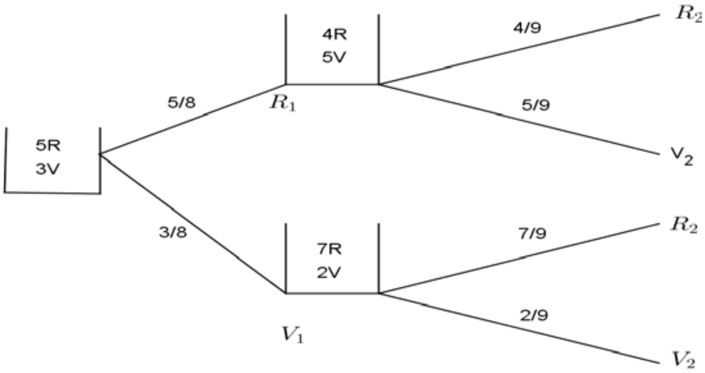
EJERCICIO 3_A
Parte I
Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcule:
a) (1 punto) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.
b) (1 punto) La probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Solución

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcule:

Llamemos R_1, R_2, V_1 y V_2, a los sucesos siguientes, "sacar bola roja la 1ª vez", "sacar bola roja la 2ª vez", " sacar bola verde la 1ª vez" y " sacar bola verde la 2ª vez ", respectivamente.

Además tenemos $p(R_1) = 5/8$, $p(V_1) = 3/8$, $p(R_2/R_1) = 6/9$, $p(V_2/V_1) = 4/9$
Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
La probabilidad de que la segunda bola sea verde.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la 2ª bola sea verde es:

$$\mathbf{p(V_2)} = p(R_1).p(V_2/R_1) + p(V_1).p(V_2/V_1) = (5/8)\cdot(5/9) + (3/8)\cdot(2/9) = \mathbf{31/72 \cong 0'43056}.$$

b)
La probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(R_1/R_2)} = \frac{p(R_1 \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{p(R_1)\cdot p(R_2/R_1)}{1 - p(V_2)} = \frac{(5/8)\cdot(4/9)}{1 - 31/72} = \mathbf{20/41 \cong 0'4878}.$$

EJERCICIO 3_A
Parte II
La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2'9 Ha y desviación típica 0'6 Ha.
a) (0'5 puntos) Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.
b) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2'8 y 3 Ha?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2'9 Ha y desviación típica 0'6 Ha.

a)

Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.

Datos del problema: Distribución de la población $\rightarrow$ N(μ;σ) = N(2'9; 0'6); **μ = 2'9**; **σ = 0'6**; n = 169.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(2'9; \frac{0'6}{\sqrt{169}}) \cong$ **N(2'9; 0'04615).**

b)

¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2'8 y 3 Ha?

Me están pidiendo la probabilidad "$p(2'8 \le \overline{X} \le 3)$"

Luego $\mathbf{p(2'8 \le \overline{X} \le 3)}$ = {tipificamos} = $p(\frac{2'8 - 2'9}{0'04615} \le Z \le \frac{3 - 2'9}{0'04615}) \cong p(-2'17 \le Z \le 2'17)$ =

= $p(Z \le 2'17) - p(Z \le -2'17) = p(Z \le 2'17) - (1 - p(Z \le 2'17)) = 2\cdot p(Z \le 2'17) - 1$ ={Mirando en la tabla} =
= 2· 0'9850 - 1 **= 0'97**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1 punto) Los vértices de un polígono convexo son (1,1), (3,1/2), (8/3,5/2), (7/3,3) y (0,5/3). Calcule el máximo de la función objetivo F(x,y) = 3x – 2y + 4 en la región delimitada por dicho polígono.

b) (2 puntos) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 2y \ge 6; \quad x - y \le 1; \quad y \le 5; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0.$$

y determine sus vértices.

Solución

a)

Los vértices de un polígono convexo son (1,1), (3,1/2), (8/3,5/2), (7/3,3) y (0,5/3). Calcule el máximo de la función objetivo F(x,y) = 3x – 2y + 4 en la región delimitada por dicho polígono.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores (1,1), (3,1/2), (8/3,5/2), (7/3,3) y (0,5/3). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(1,1) = 3(1) – 2(1) + 4 = 5; **F(3,1/2)** = 3(3) – 2(1/2) + 4 **= 12**; F(8/3,5/2) = 3(8/3) – 2(5/2) + 4 = 7
F(9,2) = 3(7/3) – 2(3) + 4 = 5; F(4,1) = 3(0) – 2(5/3) + 4 = 2/3 ≅ 0'67.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 12** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(3,1/2).**

b)

Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 2y \ge 6; \quad x - y \le 1; \quad y \le 5; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0.$$

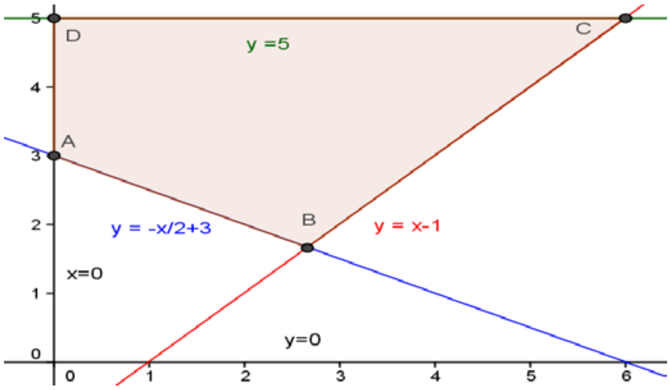
y determine sus vértices.

Las desigualdades $x + 2y \ge 6$; $x - y \le 1$; $y \le 5$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x + 2y = 6$; $x - y = 1$; $y = 5$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x/2 + 3; \quad y = x - 1; \quad y = 5; \; x = 0; \quad y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = -x/2 + 3$, tenemos $y = 3$, y el vértice es A(0,3).

De $y = -x/2 + 3$ e $y = x - 1$, tenemos $-x/2 + 3 = x – 1 \rightarrow -x + 6 = 2x – 2$, luego $8 = 3x$ de donde $x = 8/3$ e $y = 5/3$, y el el vértice es B(8/3,5/3).

De $y = x - 1$ e $y = 5$, tenemos $x - 1 = 5$, luego $x = 6$ y el vértice es C(6,5).

De $y = 5$ y $x = 0$, tenemos el vértice es D(0,5).

EJERCICIO 2_B

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{4}{x - 2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

b) (1 punto) Calcule la derivada de $g(x) = (x + 1).e^{2x + 1}$.

Solución

a)

Estudie la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{4}{x - 2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.

$x^2 – 4x + 7$ es una función continua y derivable en R, en particular en $x < 3$.

$\dfrac{4}{x - 2}$ es una función continua y derivable en R – {2}, en particular en $x > 3$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 3.

f(x) es continua en x = 3 si $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.

$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 – 4x + 7) = (3)^2 – 4(3) + 7 = 4$;

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{4}{x - 2} = \dfrac{4}{3 - 2} = 4$, por tanto f(x) es continua en x = 3.

Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{4}{x - 2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{-4}{(x - 2)^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 3 si $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x - 4) = 2(3) – 4 = 2$; $\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{-4}{(x - 2)^2} = \dfrac{-4}{(3 - 2)^2} = -4$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 3.** Luego $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{-4}{(x - 2)^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Recapitulando **f es derivable en R – {3}.**

b)
Calcule la derivada de $g(x) = (x + 1).e^{2x+1}$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$; $(k)' = 0$; $(a^{f(x)})' = a^{f(x)}\cdot \ln(a)\cdot f'(x)$.

$g(x) = (x + 1).e^{2x+1}$. $g'(x) = 1\cdot e^{2x+1} + (x + 1)\cdot e^{2x+1}\cdot(2) = e^{2x+1}\cdot(1 + 2x + 2) = e^{2x+1}\cdot(2x + 3)$

EJERCICIO 3_B

Parte I

El despertador de un trabajador suena en el 80% de los casos. Si suena, la probabilidad de que llegue puntual al trabajo es 0'9; si no suena, llega tarde el 50% de las veces.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue puntual?
b) (1 punto) Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sonado el despertador?

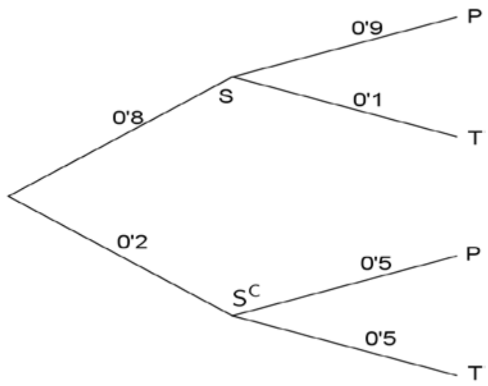
Solución

El despertador de un trabajador suena en el 80% de los casos. Si suena, la probabilidad de que llegue puntual al trabajo es 0'9; si no suena, llega tarde el 50% de las veces.

Llamemos S, S^C, P y T, a los sucesos siguientes, "suene el despertador", "n suene el despertador", "llegue puntual al trabajo" y " llegue tarde al trabajo", respectivamente.

Datos del problema p(S) = 80% = 0'8; p(P/S) = 0'9; $p(T/S^C)$ = 50 % = 0'5.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que llegue puntual?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\mathbf{p(P)} = 0'62 = p(S).p(P/S) + p(S^C).p(P/S^C) = (0'8)\cdot(0'9) + (0'2)\cdot(0'5) = \mathbf{0'82}.$$

b)
Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sonado el despertador?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(S^C/T) =} \frac{p\left(S^c \cap T\right)}{p(T)} = \frac{p\left(S^c\right).p(T/S^c)}{1 - p(P)} = (0'2)\cdot(0'5):(1 - 0'82) \cong \mathbf{0'556}.$$

EJERCICIO 3_B

Parte II

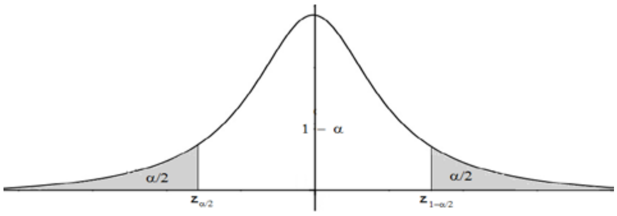
a) (1 punto) De una población Normal de media desconocida y desviación típica 6, se extrae la siguiente muestra

82, 78, 90, 89, 92, 85, 79, 63, 71.

Determine un intervalo de confianza, al 98%, para la media de la población.
b) (1 punto) Determine el tamaño que debe tener otra muestra de esta población para que un intervalo de confianza para la media, al 98%, tenga una amplitud igual a 4'66.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

a)
De una población Normal de media desconocida y desviación típica 6, se extrae la siguiente muestra
82, 78, 90, 89, 92, 85, 79, 63, 71.
Determine un intervalo de confianza, al 98%, para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 6$, $n = 9$, $\overline{x} = (82+78+90+89+92+85+79+63+71)/9 = 81$, nivel de confianza = 98% = = 0'98 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'02$, es decir $\alpha/2 = 0'02/2 = 0'01$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'99 no viene, y la más próxima es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'33$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(81 - 2'33\cdot\frac{6}{\sqrt{9}}, 81 + 2'33\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}\right) = \mathbf{(76'34, 85'86).}$$

b)
Determine el tamaño que debe tener otra muestra de esta población para que un intervalo de confianza para la media, al 98%, tenga una amplitud igual a 4'66.

Datos del problema: $\sigma = 6$, amplitud del intervalo = $b - a = 2\cdot E = 4'66$, de donde $E = 2'33$, $z_{1-\alpha/2} = 2'33$ (es el mismo nivel de confianza) .

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'33\cdot 6}{2'33}\right)^2 = 36$, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 36**.