OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1 punto) Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x - 3y \geq -13; \quad 2x + 3y \geq 17, \quad x + y \leq 11; \quad y \geq 0.$$

b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.

c) (1 punto) Calcule los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 5x + 6y en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

Solución

a) Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x - 3y \geq -13; \quad 2x + 3y \geq 17, \quad x + y \leq 11; \quad y \geq 0.$$

b) Determine los vértices de este recinto.

c) Calcule los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 5x + 6y en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

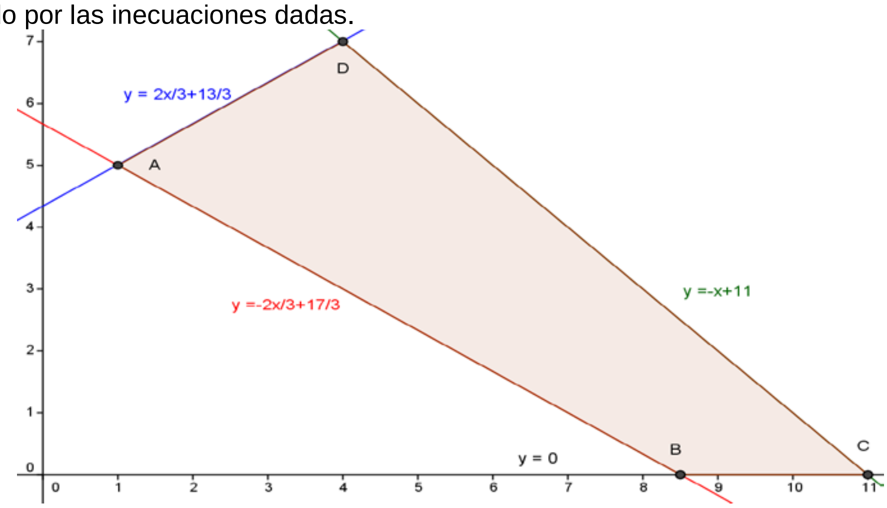
(a), (b) y (c)

Las desigualdades $2x - 3y \geq -13$; $2x + 3y \geq 17$, $x + y \leq 11$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $2x - 3y = -13$; $2x + 3y = 17$, $x + y = 11$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 2x/3 + 13/3; \quad y = -2x/3 + 17/3; \quad y = -x + 11; \; y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = 2x/3+13/3$ e $y = -2x/3+17/3$, tenemos $2x/3+13/3 = -2x/3+17/3$, luego $2x+13 = -2x+17$, de donde $4x = 4$, es decir $x = 1$ e $y=5$, y el vértice es A(1,5).

De $y = -2x/3+17/3$ e $y = 0$, tenemos $-2x/3+17/3 = 0$, es decir $x = 17/2 = 8'5$, y el vértice es B(8'5,0).

De $y = 0$ e $y = -x + 11$, tenemos $x = 11$, y el vértice es C(11,0).

De $y = -x + 11$ e $y = 2x/3+13/3$, tenemos $-x + 11 = 2x/3+13/3 \rightarrow -3x+33 = 2x+13 \rightarrow 20 = 5x$, luego $x=4$ e $y = 7$, y el vértice es D(4,7).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(1,5), B(8'5,0), C(11,0) y D(4,7).

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(1,5), B(8'5,0), C(11,0) y D(4,7). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(1,5) = 5(1) + 6(5) **= 35**; F(8'5,0) = 5(8'5) + 6(0) = 42'5;
F(11,0) = 5(11) + 6(0) = 55; **F(4,7)** = 5(4) + 6(7) **= 62**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 62** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(4,7), y el mínimo absoluto de la función F en la región es 35** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(1,5).**

EJERCICIO 2_A

a) (1'5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, calcule *a* y *b* para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,4).

b) (1'5 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{2}{x} + L\,x$ en el punto de abscisa x = 1.

Solución

a)

Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, calcule *a* y *b* para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,4).

Como (1,4) es un punto de la gráfica tenemos que **f(1) = 4**.

Como (1,4) es un extremo relativo, sabemos que anula la primera derivada, luego **f '(1) = 0.**

$f(x) = ax^2 + bx$; $f'(x) = 2ax + b$.

De $f'(1) = 0 \rightarrow 2a(1) + b = 0 \rightarrow b = -2a$.

De $f(1) = 4 \rightarrow a(1)^2 + b(1) = 4 \rightarrow a + b = 4 \rightarrow a - 2a = 4$, de donde **a = - 4 y b** = - 2(-4) **= 8.**

b)

Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{2}{x} + L(x)$ en el punto de abscisa x = 1.

La recta tangente en x = 1 es "$y - g(1) = g'(1)\cdot(x - 1)$".

$g(x) = \frac{2}{x} + L(x)$; $g(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} \rightarrow g(1) = 2/1 + L(1) = 2$ y $g'(1) = -2/1 + 1/1 = -1$,

y **la recta tangente pedida es $y - 2 = -1\cdot(x - 1) = -x + 1$, es decir $y = -x + 3$.**

EJERCICIO 3_A

Parte I

En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

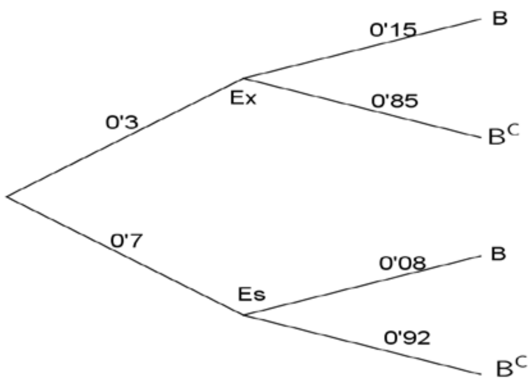
Solución

En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

Llamemos Es, Ex, B y B^C, a los sucesos siguientes, "ser estudiante español", "ser estudiante extranjero", "estar becado", y "no estar becado", respectivamente.

Datos del problema p(Ex) = 30% = 0'3; p(B/Ex) = 15% = 0'15; p(B/Es) = 8% = 0'08.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?

p(español y no tenga beca) = $p(Es\cap B^C) = p(Es).p(B^C/Es)$ = 0'7·0'92 = **0'644**.

b)
Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(Ser extranjero/tiene beca) = p(Ex/B) = $\dfrac{p(Ex \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(Ex)\cdot p(B/Ex)}{p(B)}$

Aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

p(B) = p(Ex).p(B/Ex) + p(Es).p(B/Es) = (0'3)·(0'15) + (0'7)·(0'08) = 0'101.

Por tanto **p(Ser extranjero/tiene beca)** = p(Ex/B) = $\dfrac{p(Ex \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(Ex)\cdot p(B/Ex)}{p(B)}$ = (0'3)·(0'15)/0'101 =

= 45/101 ≅ 0'4455.

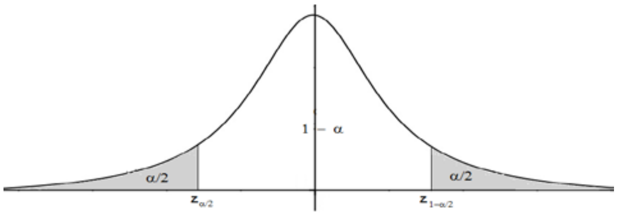
EJERCICIO 3_A

Parte II

La duración de un cierto tipo de bombillas eléctricas se distribuye según una ley Normal con desviación típica 1500 horas.
a) (1 punto) Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la vida media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la vida media de esta clase de bombillas.
b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 99% se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772'5 horas, ¿qué tamaño de la muestra se ha tomado en este caso?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n = $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

La duración de un cierto tipo de bombillas eléctricas se distribuye según una ley Normal con desviación típica 1500 horas.
a)
Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la vida media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la vida media de esta clase de bombillas.

Datos del problema: σ = 1500, n = 100, $\overline{x}$ = 9900, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9900 - 1'96\cdot\frac{1500}{\sqrt{100}}, 9900 + 1'96\cdot\frac{1500}{\sqrt{100}}\right)$ **= (9606, 10194).**

b)
Con un nivel de confianza del 99% se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772’5 horas, ¿qué tamaño de la muestra se ha tomado en este caso?

Datos del problema: σ = 1500, E ≤ 772’5, nivel de confianza = 99% = 0’99 = 1 - α, de donde α = 0’01, es decir $\alpha/2$ = 0’01/2 = 0’005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0’005 = 0’995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’995 no viene, y que una de las más próximas es 0’9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’57.

De $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot1500}{772'5}\right)^2 \cong$ 24’903, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 25**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1’5 puntos) Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema:
“Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero”.

b) (1’5 puntos) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$.

Solución

a) (1’5 puntos) Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema:
“Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero”.

x = nº de monedas de 2 cent.
y = nº de monedas de 5 cent.
z = nº de monedas de 10 cent.

De “contiene 1 euro (100 céntimos) en monedas de 2, 5 y 10 céntimos” → 2x + 5y + 10z = 100.
De “en total hay 22 monedas” → x + y + z = 22.
De “el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos” → y + z = x + 2.

El sistema pedido es: $\begin{cases} 2x + 5y + 10z = 100 \\ x + y + z = 22 \\ y + z = x + 2 \end{cases}$

b)
Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$.

$$\begin{array}{lclcl} x + y + z = 6 & \to & x + y + z = 6 & \to & x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \ (F_2 - 2F_1) & \to & -3y = -9 & \to & \mathbf{y = 3} \\ 3x + 2y - 3z = 3 \ (F_3 - 3F_1) & \to & -y - 6z = -15 & \to & -3 - 6z = -15 \ \to \ \mathbf{z = 2} \end{array}$$

Sustituyen do en x + y + z = 6, tenemos x + 3 + 2 = 6, luego **x = 1**.
La solución del sistema es (x,y,z) = (1, 3, 2).

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) (1 punto) Represéntela gráficamente.

Solución

a)

Estudie la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.
$9 - x^2$ es una función continua y derivable en R, en particular en $x < 3$.
$- 2x^2 + 16x - 30$ es una función continua y derivable en R, en particular en $x > 3$.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 3.

f(x) es continua en x = 3 si $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.
$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (9 - x^2) = 9 - (3)^2 = 0;$
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (- 2x^2 + 16x - 30) = - 2(3)^2 + 16(3) - 30 = 0$, por tanto **f(x) es continua en x = 3**.

Recapitulando **f es continua en R**.
De $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} - 2x & \text{si} \quad x < 3 \\ -4x + 16 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 3 si $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} (-2x) = -2(3) = -6;$ $\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} (- 4x + 16) = - 4(3) + 16 = 4$. Como los resultados no coinciden, **f(x) no es derivable en x = 3.** Luego $f'(x) = \begin{cases} - 2x & \text{si} \quad x < 3 \\ -4x + 16 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

Recapitulando **f es derivable en R – {3}.**

b)

Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada.

Si $x < 3$, $f'(x) = - 2x$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow - 2x = 0$, de donde la solución es x = 0, que será el posible extremo relativo.
Como $f'(-1) = - 2(-1) = 2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(-\infty,0)$.**
Como $f'(1) = - 2(1) = - 2 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1,3).**
Por definición **en x = 0 hay un máximo relativo, que vale f(0) =** $9 - (0)^2$ **= 9.**

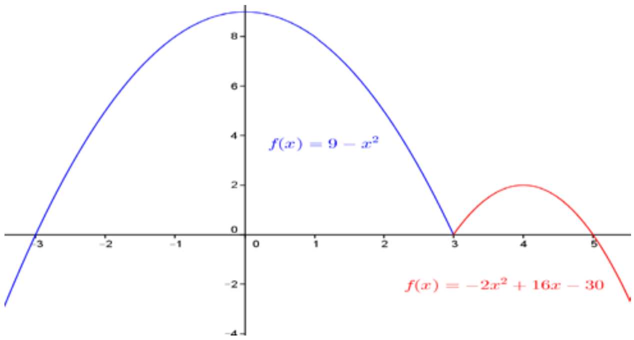
Si $x > 3$, $f'(x) = - 4x + 16$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow - 4x + 16 = 0$, de donde la solución es x = 4, que será el posible extremo relativo.
Como $f'(3'5) = - 4(3'5) + 16 = 2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (3,4).**
Como $f'(5) = - 4(5) + 16 = -4 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en $(3,+\infty)$.**
Por definición **en x = 2 hay un máximo relativo, que vale f(4) =** $- 2(4)^2 + 16(4) - 30$ **= 2.**

Como cada rama es un trozo de parábola, el punto **x = 3 es un mínimo relativo** (no sale por derivación) que vale **f(3) = 0.**

c)

Represente la gráfica de la función.

Teniendo en cuanta la anterior y que ambas ramas de la función son trozos de parábola, $9 - x^2$ con vértice en (0,9) y $- 2x^2 + 16x – 30$ con vértice en (4,2), un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60% del total, y los de 2º el 40% restante. De todos ellos, el 46% posee móvil y el 18% son de 1º y tienen móvil.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un alumno de 1º, elegido al azar, posea móvil.

b) (1 punto) Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?

Solución

En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60% del total, y los de 2º el 40% restante. De todos ellos, el 46% posee móvil y el 18% son de 1º y tienen móvil.

a)

Calcule la probabilidad de que un alumno de 1º, elegido al azar, posea móvil.

Llamemos 1º, 2º, M y M^C, a los sucesos siguientes, “alumnos de 1º”, “alumnos de 2º”, "posee móvil", y "no posee móvil", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada. La suma de los totales coincide), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

También se podría hacer por un diagrama de árbol.

Pasaremos primero el % en probabilidades (el total de los totales es 1).

60% = 0’60; 40% = 0’4; 18% = 0’18.

	Posee móvil = M	No posee móvil = M^C	Totales
Alumnos 1º = 1º	0’18		0’60
Alumnos 2º = 2º			0’40
Totales	0’46		1

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Posee móvil = M	No posee móvil = M^C	Totales
Alumnos 1º = 1º	0’18	**0’42**	0’60
Alumnos 2º = 2º	**0’28**	**0’12**	0’40
Totales	0’46	**0’54**	1

(a)

p(posea móvil/alumno de 1º) = p(M/1º) = $\dfrac{\text{Total alumnos } 1^o \text{ y movil}}{\text{Total alumnos } 1^o}$ = 0’18/0’60 **= 0’3**.

b)

Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?

p(alumno de 2º/posea móvil) = p(2º/M) = $\dfrac{p(2^o \cap M)}{p(M)} = \dfrac{\text{Total alumnos } 2^o \text{ y movil}}{\text{Total moviles}}$ = 0’28/0’46 = 147/23 ≅

≅ **0’6087**.

EJERCICIO 3_B

Parte II

Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.

a) (0’75 puntos) Escriba todas las muestras posibles.

b) (1’25 puntos) Calcule la media y varianza de las medias muestrales.

Solución

Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30. Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.
a) Escriba todas las muestras posibles.
b) Calcule la media y varianza de las medias muestrales.
(a) y (b)

Población {20, 24, 30}
Muestras posibles = {*20-20, 20-24, 20-30, 24-20; 24-24, 24-30, 30-20, 30-24; 30-30*}. Hay 9.
Media de la población = μ = (20 + 24 + 30)/3 = 74/3.
Varianza de la población = $\sigma^2 = \Sigma(\text{elementos} - \mu)^2/3 = (1/3)\cdot[(20-74/3)^2 + (24-74/3)^2 + (30-74/3)^2]$ **= 152/9.**
Desviación típica poblacional = $\sigma = \sqrt{(152/9)} = \sqrt{(152)}/3$.

Sabemos que la media poblacional μ es igual a la media poblacional μ_x, y que la desviación típica muestral σ_x coincide con la desviación típica poblacional dividido por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, es decir $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por tanto la varianza muestral es $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$.
Media poblacional $\mu_x = \mu$ = 74/3.
Varianza muestral $\sigma_X^2 = \sigma^2/n = (152/9)/2$ **= 76/9 $\cong$ 8'444.**