OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2'25 puntos) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$x + y + z = 0$$
$$2x + 3y - z = 17$$
$$4x + 5y + z = 17$$

b) (0'75 puntos) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

Solución

a) y (b)

Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$x + y + z = 0 \rightarrow x + y + z = 0 \rightarrow x + y + z = 0$

$2x + 3y - z = 17\ (F_2 - 2F_1) \rightarrow y - 3z = 17 \rightarrow y - 3z = 17$

$4x + 5y + z = 17\ (F_3 - 4F_1) \rightarrow y - 3z = 17\ (F_3 - F_2) \rightarrow 0 = 0$

Como nos han quedado un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es un sistema compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones en R, y hemos visto al desaparecer la tercera ecuación, la tercera es combinación lineal de la primera y la segunda ecuación.

Tomando $z = \lambda \in R$, tenemos $y = 17 + 3\lambda$, y de $x + (17 + 3\lambda) + (\lambda) = 0$ tenemos $x = -17 - 4\lambda$.

La solución del sistema es $(x,y,z) = (-17 - 4\lambda, 17 + 3\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) (1 punto) Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = -1$.

b) (0'5 puntos) Halle su punto de inflexión.

c) (1'5 puntos) Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a)

Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = -1$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$. La ecuación de la recta tangente (R.T.) a la gráfica de f en x = a es "$y - g(a) = g'(a)\cdot(x - a)$".

En nuestro caso la recta tangente en x = -1 es "$y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x - (-1))$".
$f(x) = x^3 + 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Luego $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$ y $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$, y **la recta tangente pedida es $y - (2) = -3\cdot(x + 1)$, es decir $y = -3x - 1$.**

b)

Halle su punto de inflexión.

Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada, luego $f''(-1) = 0$.
$f(x) = x^3 + 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6$.
De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$, que es el posible punto de inflexión.
Una de las formas de ver que es punto de inflexión es comprobando que $f'''(-1) \neq 0$, lo cual es cierto pues $f'''(x) = 6$, luego $f'''(-1) = 6 \neq 0$.
Otra forma es ver que $f''(x)$ cambia de signo a izquierda y derecha de "-1", con lo cual cambia la curvatura en x = -1.
El punto de inflexión se alcanza en x = -1, y vale f(-1) = 2 (calculado en el apartado (a)).

c)

Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

Sabemos que la monotonía sale estudiando la primera derivada $f'(x)$.
$f(x) = x^3 + 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$.
De $f'(x) = 0$, tenemos $3x^2 + 6x = 0 = x(3x + 6)$, de donde *x = 0 y x = -2. Que serán los posibles extremos relativos.*

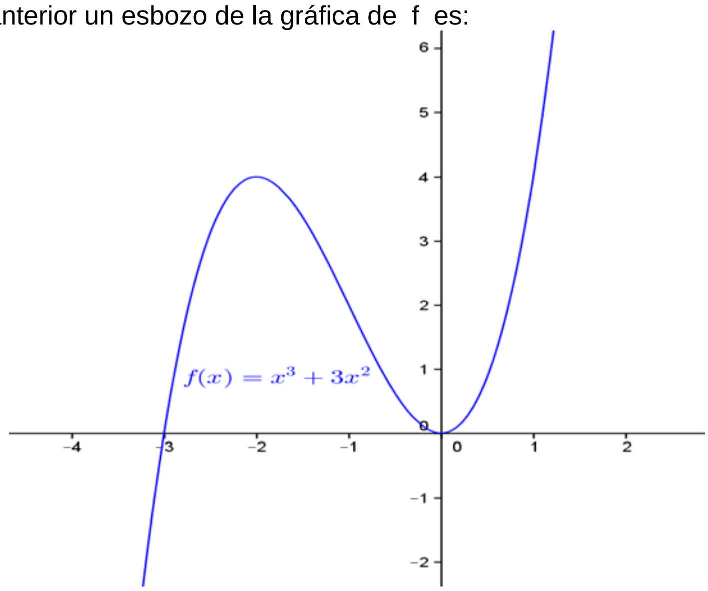
De $f'(-3) = 3(-3)^2 + 6(-3) = 9 > 0$, vemos que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty,-2)$, es decir f(x) es *estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo $(-\infty,-2)$

De $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3 < 0$, vemos que $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-2,0)$, es decir f(x) es *estrictamente* *decreciente* $(\searrow)$ en el intervalo (-2,0)

De f '(1) = $3(1)^2 + 6(1) = 9 > 0$, vemos que f '(x) > 0 en el intervalo (0,+∞), es decir f(x) es *estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (0,+∞)

Por definición x = -2 es un máximo relativo, que vale f(-2) = $(-2)^3 + 3(-2)^2 = 4$.
Por definición x = 0 es un mínimo relativo, que vale f(0) = $(0)^3 + 3(0)^2 = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos?

Solución

Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos?

Llamemos A_1, A_1^C, A_2 y A_2^C, a los sucesos siguientes, "responder correctamente el primer tema", "no responder correctamente el primer tema", "responder correctamente el segundo tema" y "no responder correctamente el segundo tema ", respectivamente.

Sabemos que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$.

Además tenemos $p(A_1) = 60/80 = 3/4 = 0'75$, $p(A_2/A_1) = 59/79$ (No son independientes).

Me piden p(**responda correctamente a los dos)** = $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = (60/80) \cdot (59/79) = 177/316 \cong$
$\cong$ **0'56**.
b)
¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos?

El suceso *responda correctamente al menos a uno de los dos es el contrario de no responder bien a ninguno de los dos temas*, luego **p(responda correctamente al menos a uno de los dos)** =
$= 1 - p(A_1^C \cap A_2^C) = 1 - p(A_1^C) \cdot p(A_2^C/A_1^C) = 1 - (20/80) \cdot (19/79) = 1 - 19/316 = 297/316 \cong$ **0'93987**.

EJERCICIO 3_A

Parte II

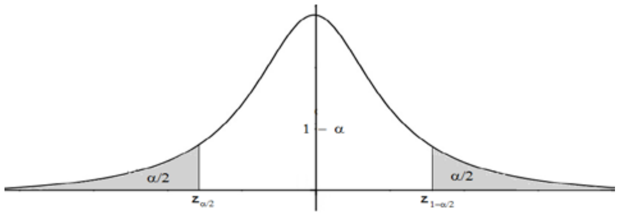
En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3.
a) (1 punto) A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7. Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media de la población.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra con la cual se estime la media, con un nivel de confianza del 99% y un error máximo admisible de 2?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la *<u>media</u>* *es* $\overline{x} = (a+b)/2$*, el* *<u>error máximo</u>* *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es* $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$*, de donde* $E = (b-a)/2$*,*

por tanto el *<u>tamaño mínimo</u>* *de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3.
a)
A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7. Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 3$, $n = 30$, $\overline{x} = 7$, nivel de confianza = 96% = 0'96 = 1 - α, de donde α = 0'03, es decir α/2 = 0'04/2 = 0'02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'98 no viene, y que la más próxima es 0'9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'05$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7 - 2'05\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}, 7 + 2'05\cdot\frac{3}{\sqrt{30}}\right) \cong \mathbf{(5'8772,\ 8'1228).}$$

b)
¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra con la cual se estime la media, con un nivel de confianza del 99% y un error máximo admisible de 2?

Datos del problema: $\sigma = 3$, $E \le 2$, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir α/2 = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de la más próxima es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'57$.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot 3}{2}\right)^2 = 14'861025$, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 15**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1 punto) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x - y \le 1;\quad x + 2y \ge 7;\quad x \ge 0;\quad y \le 5.$$

b) (1 punto) Determine los vértices de este recinto.

c) (1 punto) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo

$$F(x,y) = 2x + 4y - 5$$

y en qué puntos alcanza dichos valores?

Solución

(a), (b) y (c)

Función Objetivo **F(x,y) = 2x + 4y – 5.**

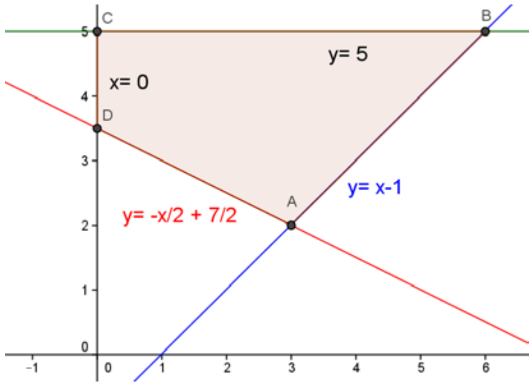
Restricciones:

Que son las desigualdades $x - y \le 1$; $x + 2y \ge 7$; $x \ge 0$; $y \le 5$; y las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x - y = 1$; $x + 2y = 7$; $x = 0$; $y = 5$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = x - 1; \quad y = -x/2 + 7/2; \quad x = 0; \quad y = 5;$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De y = -x/2 + 7/2 e y = x – 1, tenemos -x/2 + 7/2 = x – 1, es decir -x + 7 = 2x - 2, luego 9 = 3x, luego x = 3 e y = 2, y el punto de corte es A(3,2)
De y = 5 e y = x - 1, tenemos 5 = x – 1, es decir x = 6, y el punto de corte es B(6,5)
De x = 0 e y = 5. El punto de corte es C(0,5)
De x = 0 e y = -x/2 + 7/2, tenemos y = 7/2 = 3'5, y el punto de corte es D(0,3'5)

Vemos que los vértices del recinto son: A(3,2), B(6,5), C(0,5) y D(0,3'5).

Calculemos los extremos de la función F(x,y) = 2x + 4y – 5 en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(3,2), B(6,5), C(0,5) y D(0,3'5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(3,2) = 2(3)+4(2)-5 **= 9**; **F(6,5)** = 2(6)+4(5)-5 **= 27;** F(0,5)=2(0)+4(5)-5 = 15; **F(0,3'5)**=2(0)+4(3'5)-5 = **9**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 27 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(6,5) y el mínimo absoluto de la función F en la región es 9 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en los vértices A(3,2) y D(0,3'5), es decir en todos los puntos del segmento AD**.

EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma f(x)=1+L(2x −1) en el punto de abscisa x = 1.

b) (1 punto) Deduzca razonadamente las asíntotas de la función g, definida de la forma $g(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$.

c) (0'5 puntos) Determine la posición de la gráfica de la función g respecto de sus asíntotas.

Solución

a)

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma f(x) =1 + L(2x −1) en el punto de abscisa x = 1.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

La ecuación de la recta tangente (R.T.) a la gráfica de f en x = a es "y – f(a) = f '(a)·(x – a)".

En nuestro caso la recta tangente en x = 1 es "y – f(1) = f '(1)·(x – 1)".

f(x) = 1+ L(2x −1); f '(x) = 2/(2x – 1). Luego f(1) = 1 + L(2.(1) −1) = 1+ L(1) = 1 + 0 = 1 y f '(1) = 2/(2(1)–1)= = 2/1 = 2, y **la recta tangente pedida es y – (1) = 2(x – 1), es decir y = 2x – 1.**

(b) y (c)

Deduzca razonadamente las asíntotas de la función g, definida de la forma $g(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$.

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en ±∞.

También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.), si el límite en dicho número es ∞, que también es nuestro caso.

Tenemos $g(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$, cuya grafica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H.

El número que anula el denominador (x-2=0) es x = 2, y como $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3-x}{x-2} = 1/0^- = -\infty$, la recta x = 2 es una A.V. de f. Además (c) a la izquierda del 2, g está en - ∞.

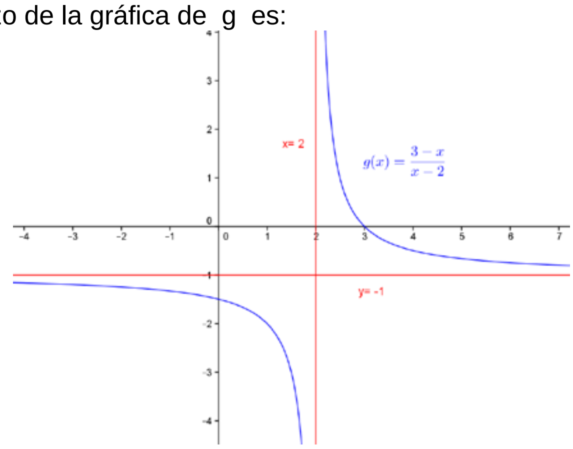
De $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3-x}{x-2} = 1/0^+ = +\infty$, (c) a la derecha del 2, g está en + ∞.

Como $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3-x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} (-x/x) = \lim_{x\to +\infty} (-1) = -1$, la recta y = -1 es una A.H. en ± ∞.

De $\lim_{x\to +\infty} (g(x) - \text{A.H.}) = \lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3-x}{x-2} - (-1)\right) = 0^+$, (c) tenemos que g está por encima de la A.H. en + ∞.

De $\lim_{x\to -\infty} (g(x) - \text{A.H.}) = \lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3-x}{x-2} - (-1)\right) = 0^-$, (c) tenemos que g está por debajo de la A.H. en - ∞.

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de g es:



EJERCICIO 3_B

Parte I

En los "Juegos Mediterráneos Almería 2005" se sabe que el 5% de los atletas son asiáticos, el 25% son africanos y el resto son europeos. También se sabe que el 10% de los atletas asiáticos, el 20% de los atletas africanos y el 25% de los atletas europeos hablan español.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un atleta, elegido al azar, hable español.

b) (1 punto) Si nos encontramos con un atleta que no habla español, ¿cuál es la probabilidad de que sea africano?

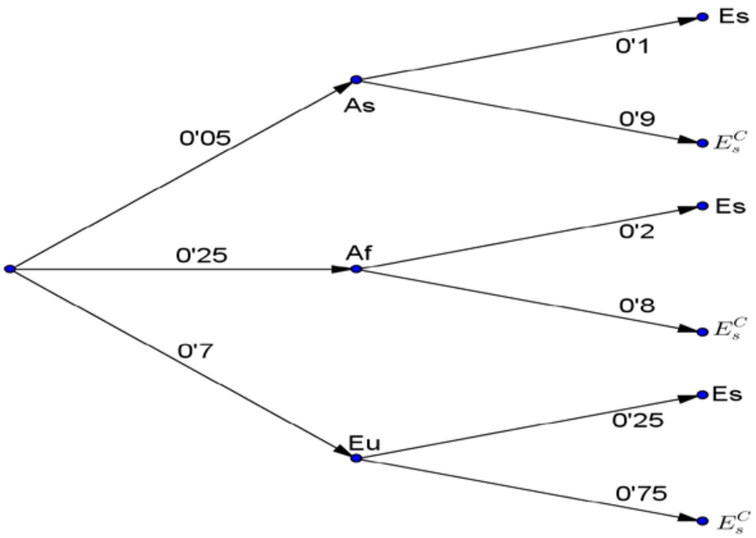
Solución

En los "Juegos Mediterráneos Almería 2005" se sabe que el 5% de los atletas son asiáticos, el 25% son africanos y el resto son europeos. También se sabe que el 10% de los atletas asiáticos, el 20% de los atletas africanos y el 25% de los atletas europeos hablan español.

Llamemos As, Af, Eu, Es^C y Es^C, a los sucesos siguientes, “atleta asiático”, “atleta africano”, "atleta europeo", “habla español” y "no habla español", respectivamente.

Además tenemos p(As) = 5% = 0’05, p(Af) = 25% = 0’25, p(Eu) = 70% = 0’7, p(Es/As) = 10% = 0’1, p(Es/Af) = 20% = 0’1 y p(Es/Eu) = 25% = 0’25.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que un atleta, elegido al azar, hable español.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que hable español es:

p(Es) = p(As).p(Es/As) + p(Af).p(Es/Af) + p(Eu).p(Es/Eu) =
= (0’05)·(0’1) + (0’25)·(0’2) + (0’7)·(0’25) **= 0’23**.

b)
Si nos encontramos con un atleta que no habla español, ¿cuál es la probabilidad de que sea africano?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(Af/Es^C)} = \frac{p\left(Af \cap Es^C\right)}{p(Es^C)} = \frac{p\left(Af).p(Es^C/Af\right)}{1 - p(Es)} = \frac{(0'25)\cdot(0'8)}{1 - 0'23} = 20/77 \cong \mathbf{0'2597}.$$

EJERCICIO 3_B

Parte II

a) (0’75 puntos) En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Qué composición tendrá dicha muestra?

b) (1’25 puntos) En la población formada por los números 2, 4, 6 y 8, describa las posibles muestras de tamaño 2 seleccionadas por muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución

a)
En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Qué composición tendrá dicha muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay “k” estratos y que el número de elementos de cada estrato es N_1, N_2, ..., N_k, y si n_1, n_2, ..., n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números n_1, n_2, ..., n_k proporcionales a los tamaños de los estratos N_1, N_2, ..., N_k, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{60} = \frac{n_2}{40} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

De $\frac{n_1}{60} = \frac{1}{20}$, tenemos $n_1 = \frac{60}{20} = \mathbf{3}$ **mujeres** en el primer estrato.

De $\frac{n_2}{40} = \frac{1}{20}$, tenemos $n_2 = \frac{40}{20} =$ **2 hombres** en el segundo estrato. También se podría haber calculado restando al total de la muestra 4 el número de mujeres 3, y nos quedarían 2 hombres.

b)

En la población formada por los números 2, 4, 6 y 8, describa las posibles muestras de tamaño 2 seleccionadas por muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 16. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

	MUESTRAS															
Elementos	2 2	2 4	2 6	2 8	4 2	4 4	4 6	4 8	6 2	6 4	6 6	6 8	8 2	8 4	8 6	8 8
Media de la muestra $\overline{x}_i$	2	3	4	5	3	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
$\sum$	**N=16**	**80**	**440**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{80}{16} = 5$$

La varianza de la distribución muestral de medias es:

$$\boldsymbol{\sigma^2 =} \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{440}{16} - (5)^2 = \frac{5}{2} \mathbf{= 2'5.}$$