OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2 puntos) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + 2y \geq 6; \quad x \leq 10 - 2y; \quad x/12 + y/3 \geq 1; \quad x \geq 0;$$

b) (1 punto) Calcule el máximo y mínimo de la función $F(x,y) = 4 - 3x - 6y$ en la región anterior e indique en qué puntos alcanzan.

Solución

(a) y (b)

Función Objetivo **F(x,y) = 4 - 3x - 6y.**

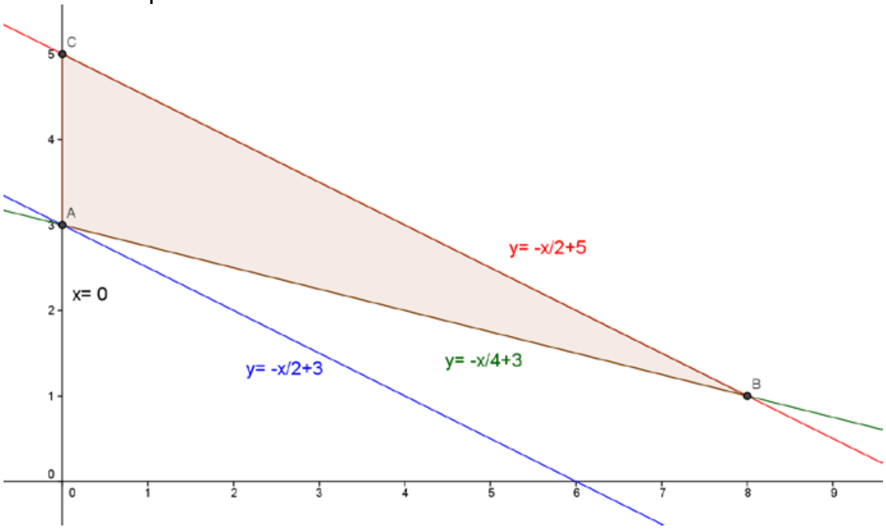
Restricciones:

Que son las desigualdades $x + 2y \geq 6$; $x \leq 10 - 2y$; $x/12 + y/3 \geq 1$; $x \geq 0$; y las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x + 2y \geq 6$; $x \leq 10 - 2y$; $x/12 + y/3 \geq 1$; $x \geq 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y", y tenemos

$$y = -x/2 + 3; \quad y = -x/2 + 5; \quad y = -x/4 + 3; \quad x = 0;$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = -x/4+3$, tenemos $y = 3$. Punto de corte es A(0,3).
De $y = -x/4+3$ e $y = -x/2 + 5$, tenemos $-x/4+3 = -x/2 + 5$, es decir $-x+12 = -2x+20$, luego $x = 8$ e $y = 1$, y el punto de corte es B(8,1).
De $x = 0$ e $y = -x/2+5$, tenemos $y = 5$. Punto de corte es C(0,5).

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,3), B(8,1) y C(0,5).

Calculemos los extremos de la función $F(x,y) = 4 - 3x - 6y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,3), B(8,1) y C(0,5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,3) = 4 – 3(0) – 6(3) **= -14**; **F(8,1)** = 4 – 3(8) – 6(1) = **-26**; **F(0,5)** = 4 – 3(0) – 6(5) = **-26**;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es -14 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice A(0,3) y el mínimo absoluto de la función F en la región es -26 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en los vértices B(8,1) y C(0,5), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento BC**.

EJERCICIO 2_A

Sea la función f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Dibuje la gráfica de *f* y estudie su monotonía.
b) (0'75 puntos) Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es –1.
c) (0'75 puntos) Estudie la curvatura de la función.

Solución

Sea la función f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

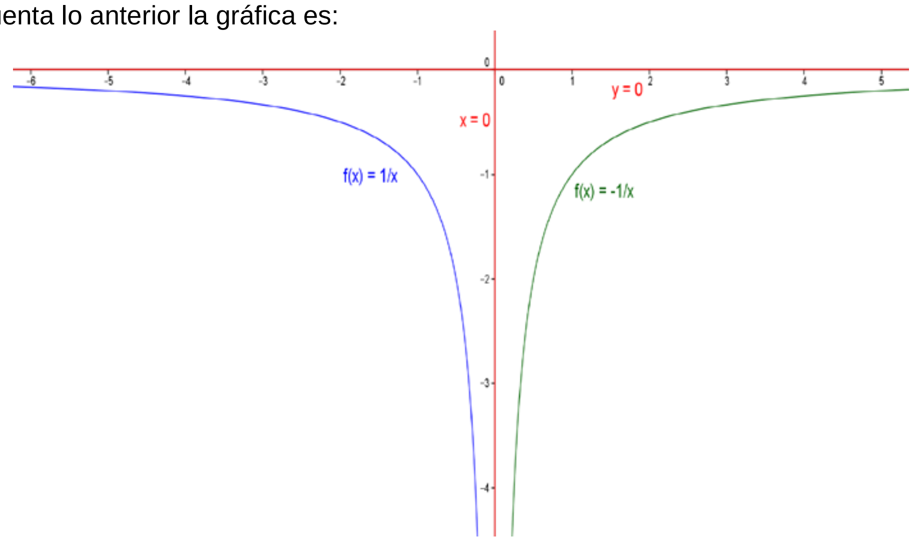
a)
Dibuje la gráfica de *f* y estudie su monotonía.

Tanto 1/x como -1/x tienen por gráficas hipérbolas, por tanto conociendo sus asíntotas x = 0 (vertical A.V.), y = 0 (horizontal A.H.), y dándole un valor a izquierda o derecha de la A.V. sabremos en que cuadrante están.

Si x < 0, f(x) = 1/x.
Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1/x) = 1/-\infty = 0^-$, la recta y = 0 es una A.H. en $-\infty$.
Como $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1/x) = 1/0^- = -\infty$, la recta x = 0 es una A.V. al la izquierda del 0.
Para x = -1, f(-1) = 1/-1 = -1, tenemos el punto (-1,-1) y la gráfica está en el III cuadrante.

Si $x \ge 0$, f(x) = -1/x.
Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-1/x) = -1/\infty = 0^-$, la recta y = 0 es una A.H. en $+\infty$.
Como $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (-1/x) = -1/0^+ = -\infty$, la recta x = 0 es una A.V. a la derecha del 0.
Para x = 1, f(1) = -1/1 = -1, tenemos el punto (1,-1) y la gráfica está en el IV cuadrante.

Teniendo en cuenta lo anterior la gráfica es:



Observando la gráfica f(x) es *estrictamente decreciente* $(\searrow)$ en el intervalo $(-\infty,0)$ y es *estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.
b)
Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es –1.

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente es f '(x), por tanto tenemos que resolver la ecuación f '(x) = -1.

Tenemos f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ y f '(x) = $\begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Si x < 0, f '(x) = $-1/x^2$ = -1, de donde x^2 = 1 y las soluciones son x = ±1. Sólo sirve x = -1 (está en x < 0) y el punto pedido es (-1,f(-1)) = (-1,-1).

Si x ≥ 0, f '(x) = $1/x^2$ = -1, de donde x^2 = -1 que no tiene solución real.

Luego el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es –1 es el (-1,-1).

c)

Estudie la curvatura de la función.

Viendo la gráfica vemos que f(x) es cóncava (∩) en R – {0}

Veámoslo también estudiando la segunda derivada f ''(x).

Si x < 0, f '(x) = $-1/x^2$, f '(x) = $2x/x^4$.

De f ''(x) = 0, tenemos 2x = 0, luego x = 0, que es un posible punto de inflexión. No lo es, por que x = 0 es una A.V.

Como f ''(-1) = $2(-1)/(-1)^4$ = -2 < 0, f(x) es cóncava (∩) en (-∞,0).

Si x > 0, f '(x) = $1/x^2$, f '(x) = $-2x/x^4$.

De f ''(x) = 0, tenemos -2x = 0, luego x = 0, que es un posible punto de inflexión. No lo es, por que la recta x = 0 es una A.V.

Como f ''(1) = $-2(1)/(1)^4$ = -2 < 0, f(x) es cóncava (∩) en (-∞,0), por tanto **f(x) es cóncava (∩) en R – {0}.**

EJERCICIO 3_A

Parte I

En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado?

b) (1 punto) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

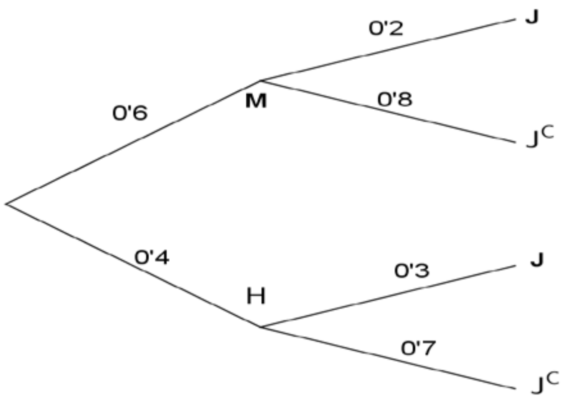
Solución

En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.

Llamemos M, H, J y J^C, a los sucesos siguientes, "mujeres", "hombres", "jubilado" y " no jubilado", respectivamente.

Además tenemos p(M) = 60% = 0'6, por contrario p(H) = 1 – p(M) = 1 – 0'6 = 0'4, p(J/M) = 20% = 0'2 y p(J/H) = 30% = 0'3.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de un componente esté jubilado es:

$$p(J) = p(M).p(J/M) + p(H).p(J/H) = (0'6)\cdot(0'2) + (0'4)\cdot(0'3) = 0'24.$$

b)
Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(M/J) = \frac{p(M\cap J)}{p(J)} = \frac{p(M).p(J/M)}{p(J)} = \frac{(0'6)\cdot(0'2)}{0'24} = 0'0288.$$

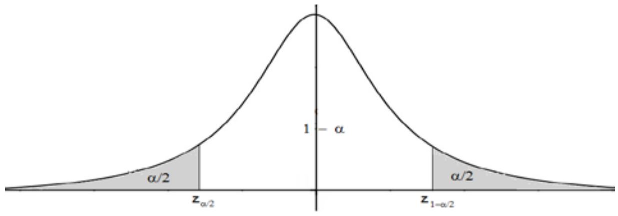
EJERCICIO 3_A

Parte II

La duración de un viaje entre dos ciudades es una variable aleatoria Normal con desviación típica 0'25 horas. Cronometrados 30 viajes entre estas ciudades, se obtiene una media muestral de 3'2 horas.
a) (1'5 puntos) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media de la duración de los viajes entre ambas ciudades.
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el error máximo cometido con dicha estimación?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media.*

Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$*.*

La duración de un viaje entre dos ciudades es una variable aleatoria Normal con desviación típica 0'25 horas. Cronometrados 30 viajes entre estas ciudades, se obtiene una media muestral de 3'2 horas.
a)
Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media de la duración de los viajes entre ambas ciudades.

Datos del problema: $\sigma = 0'25$, $n = 30$, $\overline{x} = 3'2$, nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con lo cual α/2 = 0'03/2 = 0'015
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3'2 - 2'17\cdot\frac{0'25}{\sqrt{30}}, 3'2 + 2'17\cdot\frac{0'25}{\sqrt{30}}\right) \cong \mathbf{(3'10095, 3'29905)}$$

b)
¿Cuál es el error máximo cometido con dicha estimación?

Datos del problema: $\sigma = 0'25$, n = 30 y $z_{1-\alpha/2} = 2'17$.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'17\cdot\frac{0'25}{\sqrt{30}}$, $\cong$ 0'099, tenemos que el error máximo cometido es E < 0'099.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el sistema ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x \quad - z &= 0 \\ -2y + z &= 4 \end{aligned}$$

a) (2 puntos) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.
b) (0'5 puntos) ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.
c) (0'5 puntos) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$.

Solución

a)
Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones:

$$\begin{array}{lclcl} x + y - z = -2 & \to & x + y - z = -2 & \to & x + y - z = -2 \\ 2x \; - z = 0 \;\; (F_2 - 2F_1) & \to & -2y + z = 4 & \to & -2y + z = 4 \\ -2y + z = 4 & \to & -2y + z = 4 \;\; (F_3 - F_2) & \to & 0 = 0 \end{array}$$

Como nos han quedado un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es un sistema compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones en R, y hemos visto al desaparecer la tercera ecuación, la tercera es combinación lineal de la primera y la segunda ecuación.

Tomando $y = \lambda \in R$, tenemos $z = 4 + 2\lambda$, y de $x + (\lambda) - (4 + 2\lambda) = 0$ tenemos $x = 4 + \lambda$.
La solución del sistema es $(x,y,z) = (4 + \lambda, \lambda, 4 + 2\lambda)$ con $\lambda \in R$.

b)
¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.

Para que tuviese matriz inversa la matriz de los coeficientes, su determinante tendría que ser cero, lo cual nos daría lugar a un sistema compatible y determinado con una única solución. Como nuestro sistema tiene infinitas soluciones la matriz de los coeficientes **no tiene matriz inversa.**
Veámoslo también calculando el determinante de la matriz de los coeficientes, observando que sale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = 0 - (-2)(1) + 1\cdot(-2) = 0, \text{ luego no tiene inversa.}$$

c)
Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$.

$$\begin{array}{lcl} x + y - z = -2 & & 3y - z = -2 \;\; (F_1 + F_3) \;\to\; y = 2 \\ 2x \; - z = 0 \text{ sustituyendo } x = 2y & \to & 4y \; - z = 0 \;\; (F_2 + F_3) \;\to\; 2y = 4 \\ -2y + z = 4 & & -2y + z = 4 \end{array}$$

Con lo cual y = 2, x = 2(2) = 4 yz = 4 +2(2) = 8, es decir **la solución es (x,yz) = (4,2,8)**.

EJERCICIO 2_B

(3 puntos) Sea *f* la función definida por: f (x) = $\begin{cases} ax^2 + 1 & si \quad x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$.

Determine los valores que deben tener *a* y *b* para que *f* sea derivable.

Solución

Se considera la función definida por f(x) = $\begin{cases} ax^2 + 1 & si \quad x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

Sabemos que si una función es derivable entonces es continua. En nuestro caso es continua en x = 1 y también derivable en x = 1.

Como f es continua en x = 1, tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + bx + 3) = b + 4$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax^2 + 1) = a + 1$. Como ambas expresiones son iguales, tenemos **b + 4 = a + 1.**

Tenemos f(x) = $\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$, de donde: f '(x) = $\begin{cases} 2ax & si \quad x<1 \\ 2x+b & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

Sabemos que f es derivable en x = 1, luego f '(1+) = f '(1-), es decir $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2ax) = 2a$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + b) = b + 2$. Como ambas expresiones son iguales, tenemos **2a = b + 2.**

Tenemos b + 4 = **a + 1 = b + 2 + 2**, sustituyendo b + 2 = 2a, resulta a + 1 = 2a + 2 de donde **a = -1, y b = -4.**

EJERCICIO 3_B

Parte I

Sean *A* y *B* dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que p(A) = 1/6, p(B) = 1/3 y p(A∪B) = 1/2.

a) (1'5 puntos) ¿Son *A* y *B* incompatibles? ¿Son independientes?

b) (0'5 puntos) Calcule p[A/(A∪B)]

Solución

Sean *A* y *B* dos sucesos del mismo experimento aleatorio tales que p(A) = 1/6, p(B) = 1/3 y p(A∪B) = 1/2.

a)

¿Son *A* y *B* incompatibles? ¿Son independientes?

Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); A y B son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B);

p(A/B) = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; A y B son incompatibles si p(A∩B) = 0; $p(A^C) = 1 - p(A)$.

Del problema tenemos: p(A) = 1/6, p(B) = 1/3 y p(A∪B) = 1/2.

De p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B), tenemos **p(A∩B)** = p(A) + p(B) - p(A∪B) = 1/6 + 1/3 – 1/2 = **0, luego los sucesos A B son incompatibles.**

Se **p(A∩B) = 0 ≠ p(A)·p(B)** = (1/6)·(1/3) **= 1/18, los suceso A y B no son independientes.**

b)

Calcule p[A/(A∪B)]

Tenemos **p(A/(A∪B))** = $\frac{p(A\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)} = \frac{p(A)}{p(A\cup B)}$ = (1/6)/(1/2) = 2/6 **= 1/3**.

EJERCICIO 3_B

Parte II

Sea *X* una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4.

a) (1 punto) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?

b) (1 punto) Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria "media muestral para muestras de tamaño 16", calcule el valor de *a* para que $p(50 - a \le \overline{X}_{16} \le 50 + a) = 0'9876$.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Sea *X* una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4.
a)
Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?

Datos del problema: $X \to N(\mu, \sigma) = N(50, 4)$; $\mu = 125$; $\sigma = 4$; $n = 4$;

Distribución medias muestrales $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(50, \frac{4}{\sqrt{4}}) = N(50, 4/2) = N(50, 2)$

Me están pidiendo la probabilidad "$p(\overline{X} \geq 54)$"

Luego $p(\overline{X} \geq 54)$ = {tipificamos} = $p(Z \geq \frac{54 - 50}{2}) = p(Z \geq 2) = 1 - p(Z < 2)$ = {Mirando en la tabla} =

= 1 – 0'9772 = 0'0228.

La probabilidad pedida es 0'0228.
b)
Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria "media muestral para muestras de tamaño 16", calcule el valor de *a* para que $p(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a) = 0'9876$.

Como ahora n = 16 la distribución muestral de medias es $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(50, \frac{4}{\sqrt{16}}) = N(50,4/4) = N(50,1)$

Tenemos $0'9876 = p(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a)$ = {tipificamos} = $p(\frac{(50 - a) - 50}{1} \leq Z \leq \frac{(50 + a) - 50}{1})$ =

$= p(- a \leq Z \leq a) = p(Z \leq a) - p(Z \leq - a) = p(Z \leq a) - (1 - p(Z \leq a)) = 2 \cdot p(Z \leq a) - 1$.

De la igualdad $2 \cdot p(Z \leq a) - 1 = 0'9876$, tenemos $p(Z \leq a) = 1'9876/2 = 0'9938$. Mirando en la tabla, resulta **que a la probabilidad 0'9938 le corresponde a = 2'50.**